



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

WQPK:

Würzburger Quantenphysik-Konzept

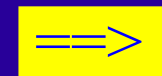
WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

I Aus dem Bayerischen Lehrplan 12. Jgst.:

Analog zu den Newton'schen Gesetzen, die als **Axiome** der klassischen Mechanik betrachtet werden können, liefert die **Schrödingergleichung**,

die nur in ihrer **zeitunabhängigen, eindimensionalen Form** betrachtet wird,

den Schlüssel zur Lösung quantenmechanischer Probleme.



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Es geht um Lösungen der Schrödingergleichung.

Aber:

**Obwohl das "wellenartige" Lösungen sind,
handelt es sich nicht um Wellen im uns um-
gebenden 3-dimensionalen Anschauungsraum,
in dem sich die Teilchen "bewegen"!**

"Geburtsfehler der herkömmlichen Didaktik der Quantenphysik"

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden? Beispiel Potenzialkasten
- IV **Methodisches**
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- VI Zum Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

• II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \psi \cdot = H \psi \quad H = p^2/2m + V(x)$$

mit Anfangs- und Randbedingungen

$$\hbar = h/2 \cdot \pi$$

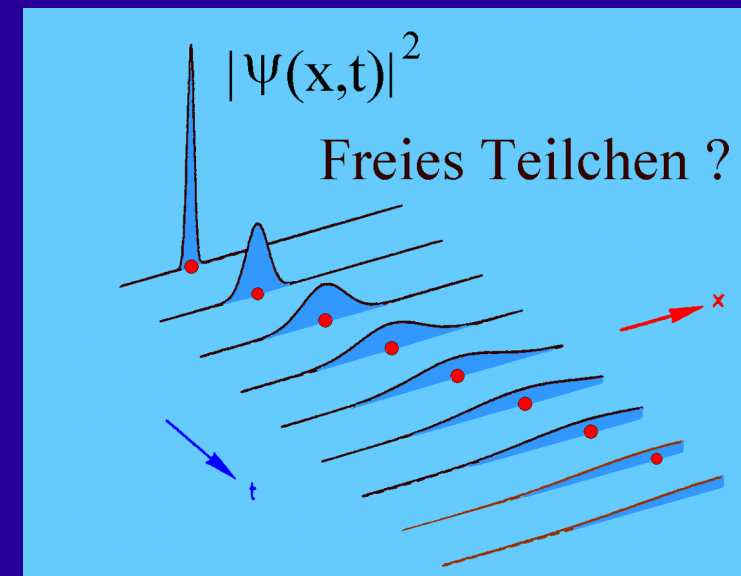
Klassische Schrödinger-Theorie (1926)

≈ realistische Wellen;

Teilchen lokalisiert ≈ Wellenpakete

≈ „Wellikel“

Überholt durch Borns Wahrscheinlichkeitsdeutung (1926)

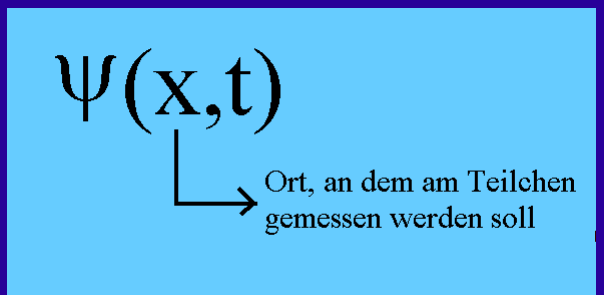
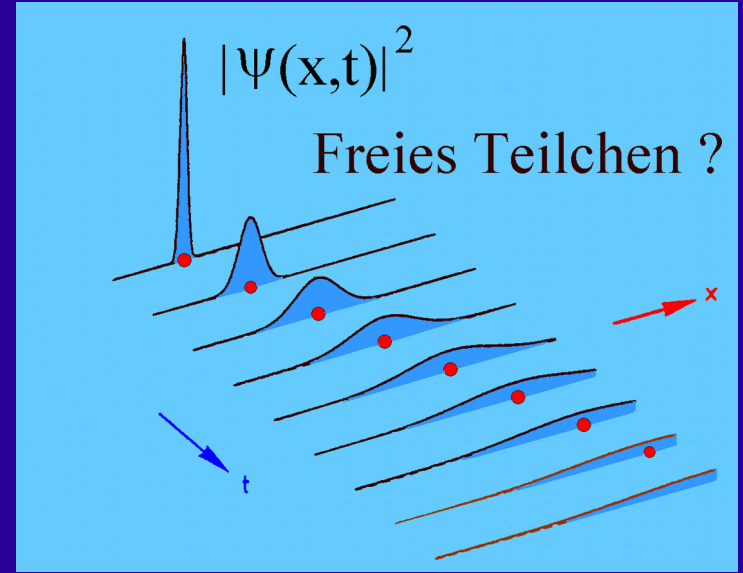


WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Also: ψ beschreibt **nicht das Teilchen selbst**, sondern Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse an einem Teilchen in einem bestimmten Zustand.

Born: $|\psi(x)|^2$ misst die Wahrscheinlichkeit für den Ausgang einer Messung für ein Teilchen in diesem Zustand!

Wellenfunktionen keine Wellen im Anschauungsraum (Zeilinger: „nur im Kopf der Physiker“)



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Ziel:

Lösung der (zeitabhängigen) Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \psi \cdot = H \psi \quad (H = p^2/2m + V(x))$$

mit Anfangs- und Randbedingungen.

Willkürliche Entscheidung:

aus der Vielzahl der phys. Lösungen sollen nur diejenigen interessieren, die

- zu **Teilchenzuständen** (1, 2, 3 Teilchen ...) gehören (Schule: 1 T),
- bei denen wiederholte Energiemessungen (am jeweils gleich präparierten System) stets **gleiche E-Werte** liefern: $H \psi = E \cdot \psi$

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

$$i \hbar \psi \cdot = H \psi$$

Die zeitunabhängige SG (zuSG)

Wegen der Messvorschrift $H \psi = E \cdot \psi$ für stationäre Zustände wird die SG

$$i \hbar \psi \cdot = E \cdot \psi$$

erfüllt durch den Lösungsansatz (ψ i.A. komplexwertig):

$$\psi(x,t) = \psi_0(x) \cdot e^{-iEt/\hbar} \text{ und es gilt für den Ortsanteil:}$$

$$H \psi_0(x) = E \cdot \psi_0(x)$$

Das ist die zuSG für den Ortsanteil der Wellenfunktion $\psi_0(x)$ in stationären Zuständen.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung $H\Psi = E\cdot\Psi$

- beliebig viele **unphysikalische** Lösungen werden weggeworfen, die nicht normierbar sind ; (Born!)
- beliebig viele **physikalische** Lösungen werden weggeworfen, die nicht Eigenzustände mit **scharfer (be-stimmter) Energie** E sind;

==> es werden nur **normierbare** Lösungen **scharfer Energie** betrachtet: **Eigenzustände**
- aber bei "vollständigem" System: jede beliebige physikalische Lösung der SG lässt sich durch Linearkombination von Eigenzuständen darstellen:
„Außerhalb der kontinuierlichen gibt es nur diskrete Energiestufen.“
- primär nur für Teilchenzustände

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

„Heuristische Methoden der Quantenphysik“:

Interferenz ist die Folge von zwei oder mehr klassisch denkbaren Möglichkeiten, zwischen denen nicht unterschieden wird.

Im Potenzialtopf muss es deshalb zur Interferenz mit örtlich variierenden Wahrscheinlichkeiten (Maxima und Minima) kommen.

Vgl. „stehende Wellen“

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Folgerung aus der Komplementarität:

- In den gesuchten stationären Zuständen sind kinetische und potenzielle Energie un-be-stimmt, d.h. **nicht Eigenschaft des Systems**.
- Wenn Sie von der Gesamtenergie E sprechen, hat es **keinen physikalischen Sinn** von kinetischer oder potenzieller Energie zu sprechen. E dagegen ist in solchen Zuständen be-stimmt.
- Messungen für E_{kin} und E_{pot} liefern be-stimmte Messwerte - streuende!
- Eine Teilchenbewegung (v, E_{kin}) oder Aufenthalt an einem bestimmten Ort (x, E_{pot}) sind in solchen Zuständen reine Fantasie!



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was steckt der Lehrer in die Lösungsvielfalt hinein,
wenn er sich auf die „zeitunabhängige SG“ (zuSG)
beschränkt?

In welchem Sinn ist die zuSG eine quantenphysikalische
Grundgleichung?

Lehrplan

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Ausschließlich „stationäre Zustände“ gesucht. Bei ihnen ist die Gesamtenergie E eine Eigenschaft des Systems (E ist bestimmt).

Also: Wenn eine ideale Energiemessung durchgeführt wird: ($H \psi$) ergibt sich ein eindeutiger Messwert E , und der Zustand wird nicht verändert ($E \cdot \psi$):

$$H \psi = E \cdot \psi$$

(Bei anderen Zuständen liefert die Energiemessung eine Linearkombination von Energieeigenzuständen mit unterschiedlichen Energien E_i .

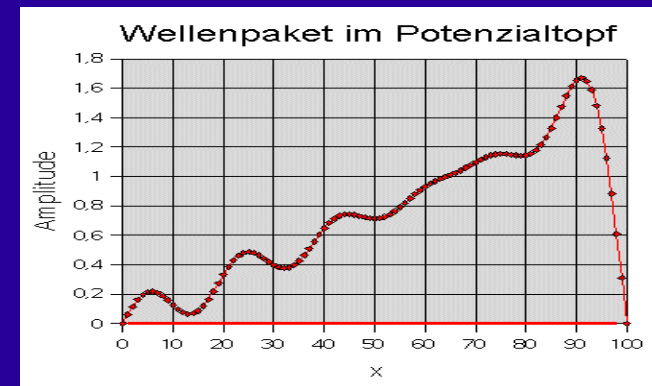
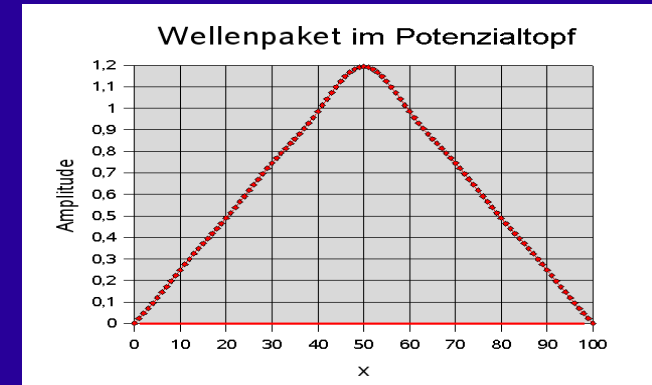
Solche Zustände sollen ausgeschlossen sein! ($H \psi = \sum c_i \cdot E_i \cdot \psi_i$)

Zustände un-bestimmter Energie wegen Überlagerung v. Zustd. bestimmter Energie)

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

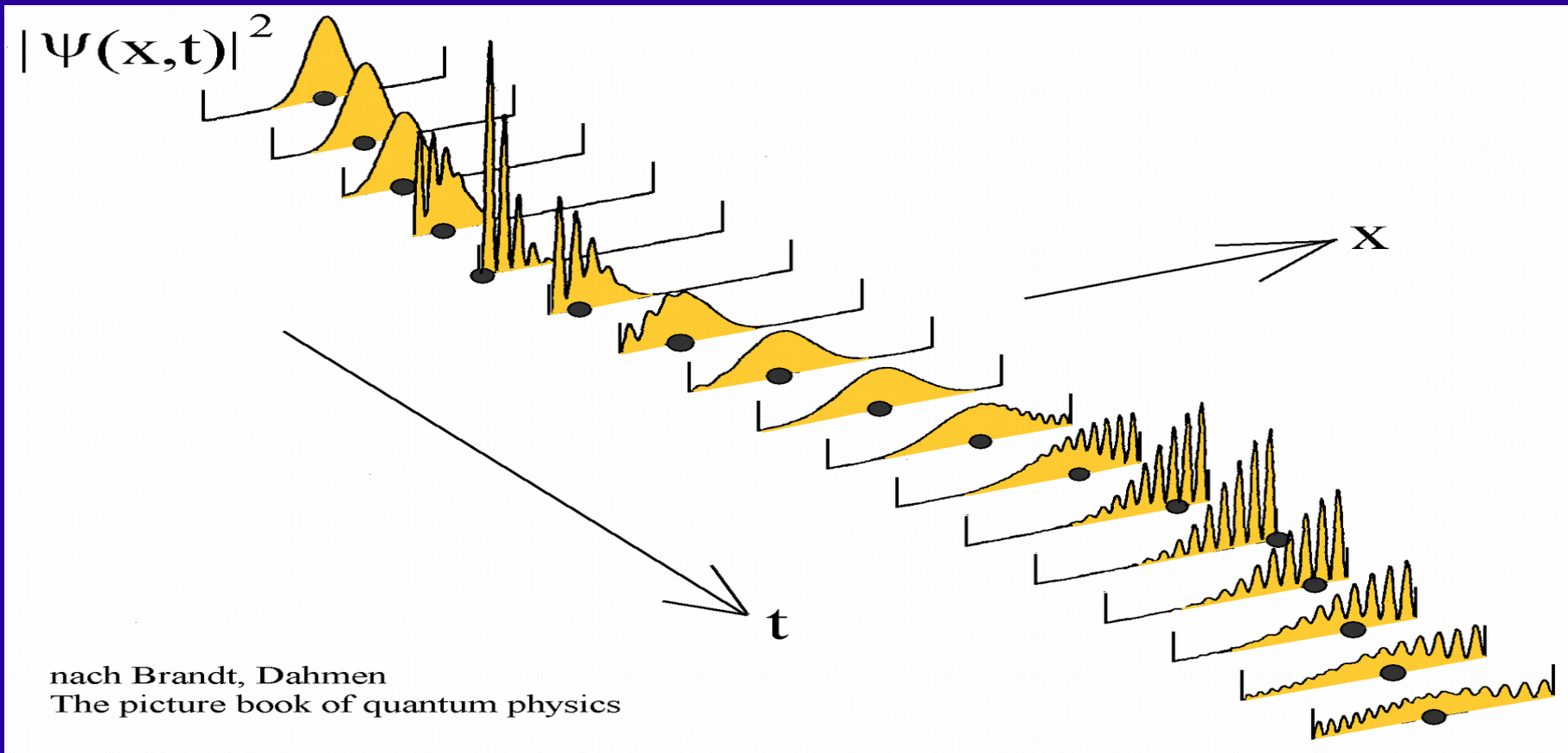
Wir Lehrer wissen:

- Die zuSG ist nur für die stationären Lösungen der SG zuständig; es gibt andere auch
- $\psi(x,t)$ i.A. komplexwertig - also keine messbare ('reale') Größe, sondern Rechengröße mit der einzigen Aufgabe, experimentell überprüfbare Wahrscheinlichkeitsaussagen für den Ausgang zukünftiger Messungen zu liefern
 - Zeilinger: „nur in den Köpfen der Physiker“
 - Es ist sinnlos, von einer Ausbreitung solcher Wellen im uns umgebenden Raum, dem Anschauungsraum, zu sprechen.



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Kein stationärer Zustand !



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Es handelt sich um Wellen im Konfigurationsraum

- z.B. im 3-dimensionalen Impulsraum (bei 1 Teilchen), oder
- im 3-dimensionalen Ortsraum (bei 1 Teilchen),
- im 6-dimensionalen Ortsraum (bei 2 Teilchen):

$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ \mathbf{x}_1 : Koordinaten des Punktes, an dem am Teilchen 1 eine
Messung vorgenommen werden soll, \mathbf{x}_2

Bei stationären Zuständen gibt es keine Bewegung
im Anschauungsraum! Keine „Ausbreitung“ !

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- **III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden? Beisp. Potenzialkasten**
- IV Methodisches
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- V Tunnel-Effekt
- VI Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VII Resümee



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- **III Was davon könnte/sollte im Unterricht gebracht werden?**
 - **Möglichst wenig!**

Aber der Lehrer braucht das Hintergrundwissen!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Bitte versuchen Sie nicht, die SG im Unterricht herzuleiten!

Üblicher Vorschlag:

Ausgang von deBroglie-Wellen: $\psi(x,t) = A \cdot e^{i(p \cdot x - E \cdot t) / \hbar}$

Dann gilt: $\psi'(x,t) = ip/\hbar \cdot \psi(x,t)$ und $\psi''(x,t) = -p^2/\hbar^2 \cdot \psi(x,t)$

und mit $E \cdot \psi(x,t) = p^2/2m \cdot \psi(x,t)$ ist damit (bis auf Konstanten) der

Operator der 2. Ableitung als

Operator der kinetischen Energie E

identifiziert, also

$$\psi''(x,t) = -2m/\hbar^2 E \psi(x,t) \implies \psi''(x,t) = -K \cdot E_{\text{kin}} \psi(x,t)$$

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

$$[\psi''(x,t) = -K \cdot E_{\text{kin}} \psi(x,t)]$$

Dann – **fälschlicherweise** :

Bei Teilchen in einem Potenzial unterscheide sich die kinetische Energie von der Gesamtenergie E um die potenzielle Energie $V(x)$, also

$$\psi''(x) = -K [E - V(x)] \psi(x) \quad , \quad \text{wobei } K = 2m/\hbar^2$$

Für konstantes $V(x)$ mit $E > V$ entspricht das der Schwingungsgleichung

Für konstantes $V(x)$ mit $E < V$ exponentielles Verhalten

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Diese „Herleitung“ erscheint nicht sinnvoll,
weil sie der Physik widerspricht.

- Teilchen in den gesuchten stationären Zuständen können keine potenzielle Energie und kinetische Energie zugleich haben!
- $\Rightarrow V(x)$ nur eine formale **Potenzialfunktion** mit gleicher mathematischer Gestalt wie die potenzielle Energie beim entsprechenden klassischen Problem
- **Könnten Sie im Unterricht den Widerspruch bewältigen:**
 - $V(x)$ sieht aus wie die potenzielle Energie, ist aber keine ?
 - $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}$ soll verwendet werden, aber es gibt keine E_{kin} , E_{pot} ?

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Vorschlag:

Anschreiben:

- **Gesucht: Zustände bestimmter Energie E für 1 Teilchen**
- **zuSG kommentarlos anschreiben und mitteilen:**
- $V(x)$ ist nicht E_{pot} , sondern die **Potenzialfunktion** mit gleicher Form wie die potenzielle Energie eines klassischen Teilchens am Ort x
- E_{kin} und E_{pot} sind für die gesuchten Lösungen physikalisch sinnlose Begriffe
(keine Eigenschaften)

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Born'sche Wahrscheinlichkeitsdeutung:

$|\psi(x)|^2 \Delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit,

**bei einer Messung ein Teilchen im Intervall der
Breite Δx um den Ort x zu finden**

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen genau an einem Ort x zu finden, ist immer 0!

Eigentl. keine „Aufenthalts“wahrscheinlichkeit !

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Wie sieht eine korrekte physikalische Lösung aus?

1. $\psi(x)$ muss quadratintegrierbar sein, vereinfacht zu „endlich sein“

2. $\psi(x)$ muss die Randbedingungen erfüllen:

$\psi(x)$ überall stetig und diffbar,
 $\psi'(x)$ überall stetig und endlich

statt 2: $\psi(x) = 0$ an den Rändern eines Potenzialkastens mit unendl.
Wänden

Nur für bestimmte (diskrete) Energien erfüllbar!



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Die Mathematik der zuSG ist relativ einfach !

- Leicht überprüfbare Lösungsansätze
- Tabellenkalkulation
- PC-Programme, bei denen Testwerte E variiert werden, bis sich physikalische Lösungen ergeben

M.E. sollte diese Mathematik nicht im Zentrum des Unterrichts stehen, jedoch – lehrplangemäß - Folgerungen !

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialkasten:

$$\psi''(x) = -K E \psi(x) \quad , \quad \text{wobei } K = 2m/\hbar^2 \quad \text{für } 0 < x < 2 \cdot d$$

Entspricht SG eines freien Teilchens oder einer Schwingungsgleichung.

Wegen anderer Randbedingungen $\psi(0) = 0$ und $\psi(2 \cdot d) = 0$

andere Lösungen als für freies Teilchen. Nur physikal. Lösungen gesucht!

(Identische Gleichungen haben offenbar nicht immer identische Lösungen)

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialkasten:

$$\psi''(x) = -K E \psi(x) \quad , \quad \text{wobei } K = 2m/\hbar^2 \quad \text{für } 0 < x < 2 \cdot d$$

Ohne Rechnung nach den Grundfakten:

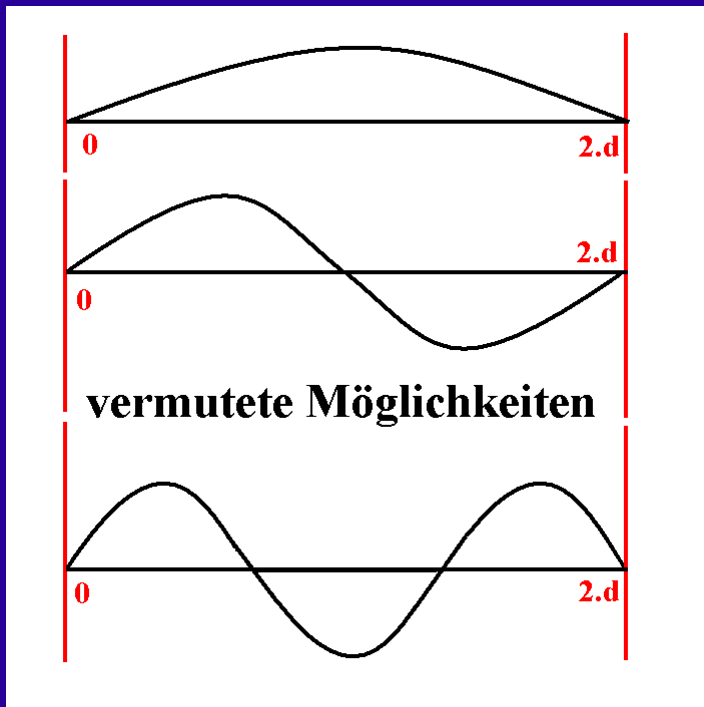
Interferenz, wenn zwischen zwei klassisch denkbaren Möglichkeiten nicht unterschieden wird:

- Bewegung nach links
- Bewegung nach rechts

=> Minima und Maxima der Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in der Nähe eines bestimmten Ortes zu finden.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Methode 1a: Was weiß man über die Lösungen?



1. Ortsanteil muss an den Rändern verschwinden
2. Er muss quadratintegrierbar (**endlich**) sein
3. kein Grund erkennbar, weshalb der Ortsanteil komplexwertig

(Nullstellen und Extrema wie bei Sinus, ... oder Polynomfunktionen, ...)

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Methode 1a:

$$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$$

$$\psi'(x) = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x)$$

$$\psi''(x) = -k^2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x)$$

Also:

Lösungsansatz

dann folgt:

und

$$\psi''(x) = -k^2 \cdot \psi(x) \quad *)$$

Ein Vergleich mit der zuSG [$\psi''(x) = -2m/\hbar^2 E \cdot \psi(x)$] liefert

$$k^2 = 2m/\hbar^2 E$$

Damit ist der Ansatz bestätigt für solche E- oder k-Werte.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

E bzw. k sind nach wie vor unbekannt.

$$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$$

Die letzte Nullstelle des sin ist bei $k \cdot 2 \cdot d = n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{N}$)

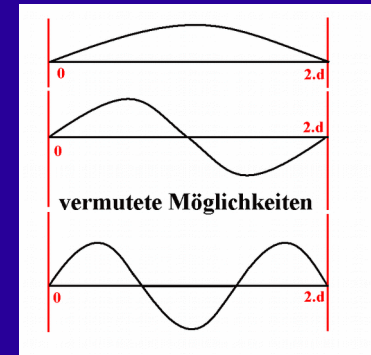
Damit ist $k = n \cdot \pi / 2 \cdot d$ bekannt, und es gilt

$$E = \hbar^2 / 2m \cdot k^2 = \hbar^2 / 2m \left(n \cdot \pi / 2 \cdot d \right)^2 = \hbar^2 / (32d^2m) n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Diskussion:

$$E_n = E_1 n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

E_1 Grundzustandsenergie, „Nullpunktsenergie“ („Lokalisierungsenergie“), quadratisches Wachstum mit n, Knoten und Bäuche; nahe der Bäuche ist Teilchen besonders häufig zu finden



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

1b: Alternative Methode ?

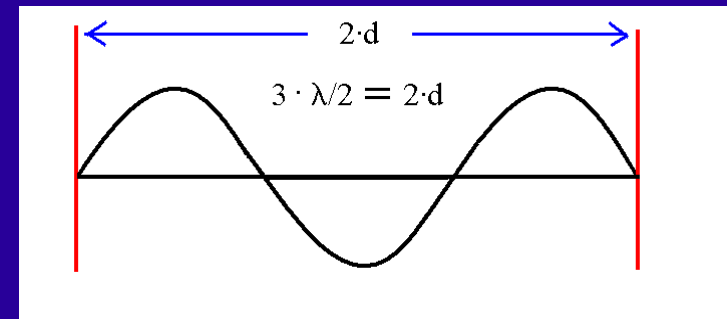
Einpassen von halben Wellenlängen im Zusammenhang mit einer deBroglie-Wellenlänge λ : $p = h/\lambda$, also

$$n \cdot \lambda/2 = 2 \cdot d \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \lambda = 4 \cdot d / n$$

Dann $p = h/4d \cdot n$ und

$$E = p^2/2m = h^2/(32d^2m) \cdot n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Sehr suggestiv und einfach, aber ?

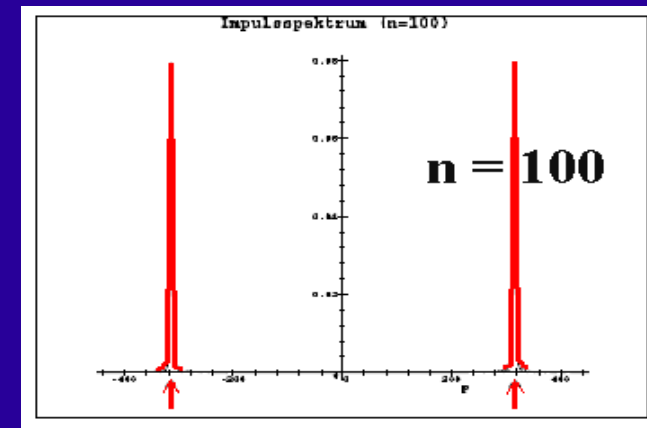
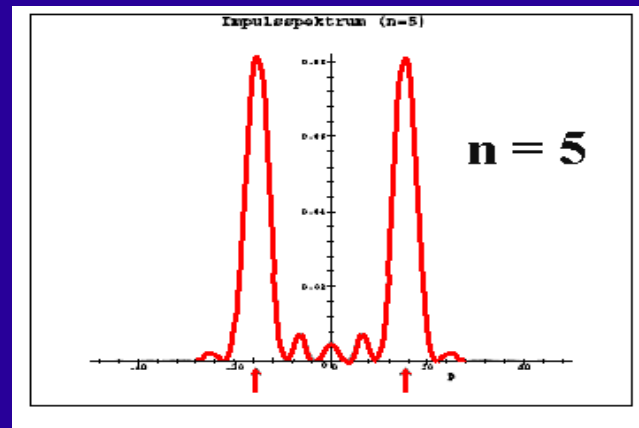
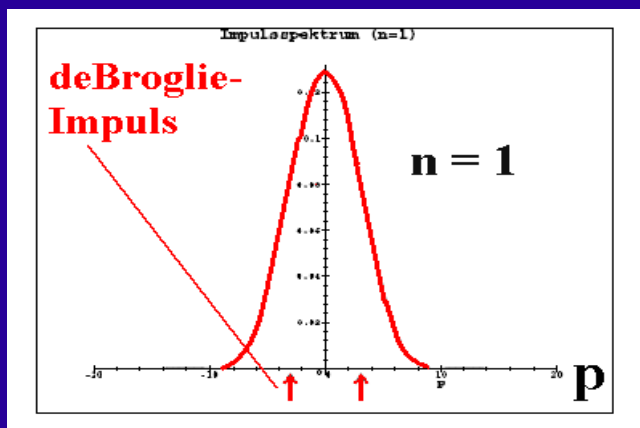


WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Einwände: Eigentlich keine deBroglie-Wellenlänge!

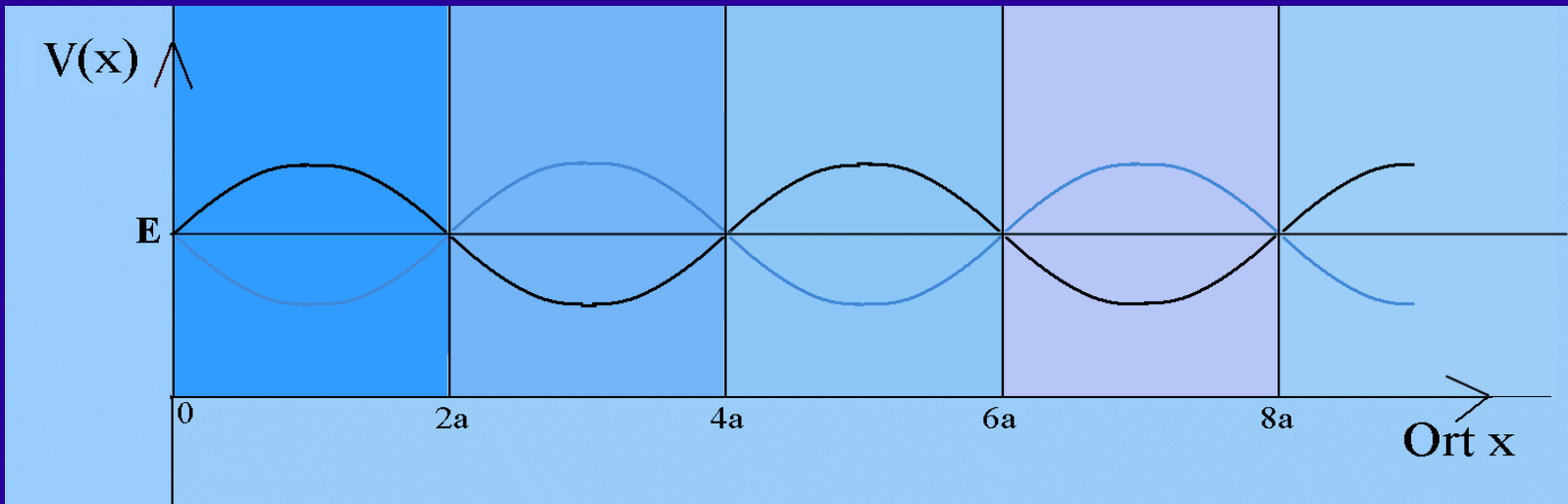
Es gibt in solchen Zuständen keine bewegten Teilchen, die einen Impuls haben könnten; E und p sind nicht gleichzeitig messbar!

Impulsspektrum durch **Fouriertransformation in den Impulsraum** leicht erhältlich (Abb. nach Wiesner und Berger):



Zufall ?

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule



Aneinanderreihung beliebig vieler unabhängiger, aber identischer Potenzialtöpfe (Kronig-Penning-Modell)

Kein Einfluss auf Ortsabhängigkeit d. Wellenfunktion für $0 < x < 2d$ und Energie, aber Fouriertransformation liefert scharfe Impulse $\pm p$.

anderes Probl.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Zur Einpassung halber Wellenlängen:

Wir Lehrer verstehen jetzt, weshalb das Einpassen halber Wellenlängen (deBroglie-Wellenlänge) zum richtigen Ergebnis führt.

Der Weg bleibt problematisch, da er zu falscher Argumentation (2 scharfe Impulse) führt oder aufwändig begründet werden müsste.

Sprechweise: Nicht „Wellenlänge des Elektrons“, sondern „dem Elektron zugeordnete deBroglie-Wellenlänge“

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Diskussion der Lösung:

Maxima und Minima d. Wahrscheinlichkeit; Grundzustandsenergie („Lokalisierungsenergie“)

Wie kommt das Teilchen über die Nullstellen der Wellenfunktion hinweg, obwohl es sich dort nie „aufhalten“ kann?

Was antworten Sie darauf, wenn Ihre Schüler/innen Sie so fragen?

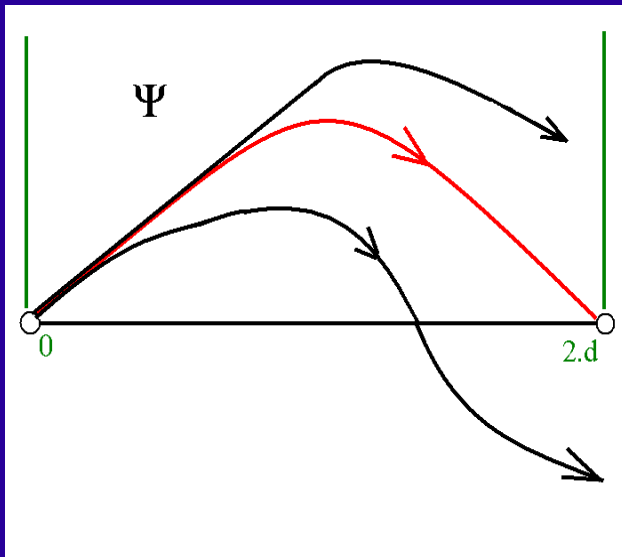
- Frage falsch gestellt: Die Nachweiswahrscheinlichkeit in jedem Punkt ist 0. Aber es gibt kein endliches Intervall Δx , wo sie 0 sein könnte!
- Es „kommt nicht“: keine Bewegung und kein „Aufenthalt“ irgendwo ohne eine Messung ! Stationärer Zustand!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Methode 2: Tabellenkalkulation „Schießen“

$\psi''(x,t) = -K \cdot E \cdot \psi(x,t)$ für $0 < x < 2d$ zu lösen mit Randbedingungen

Wahl von E , $\psi(0) = 0$, $\psi'(0)$; $\psi''(x)$ jeweils aus SG



$$\psi'(\Delta x) = \psi'(0) + \psi''(0) \cdot \Delta x$$

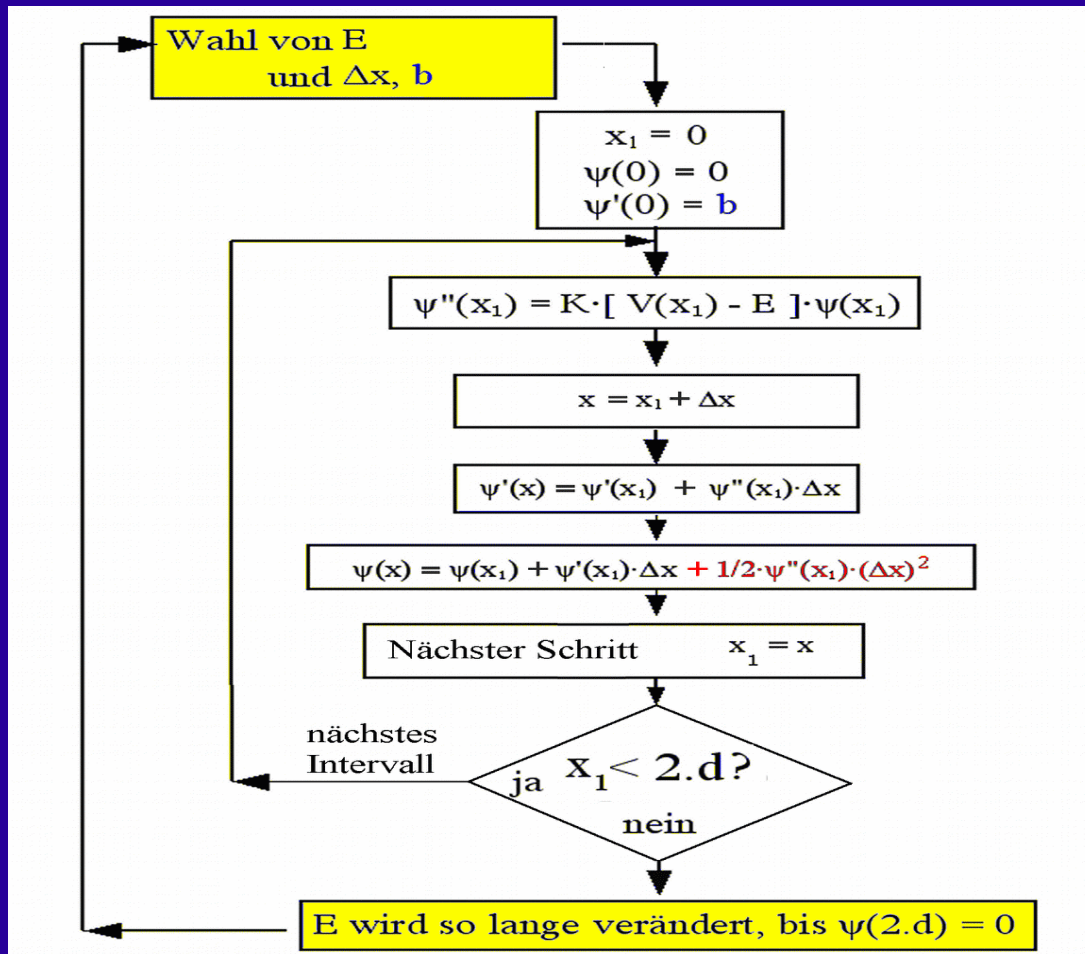
$$\psi(\Delta x) = \psi(0) + \psi'(0) \cdot \Delta x$$

Allgemein:

$$\psi'(x+\Delta x) = \psi'(x) + \psi''(x) \cdot \Delta x$$

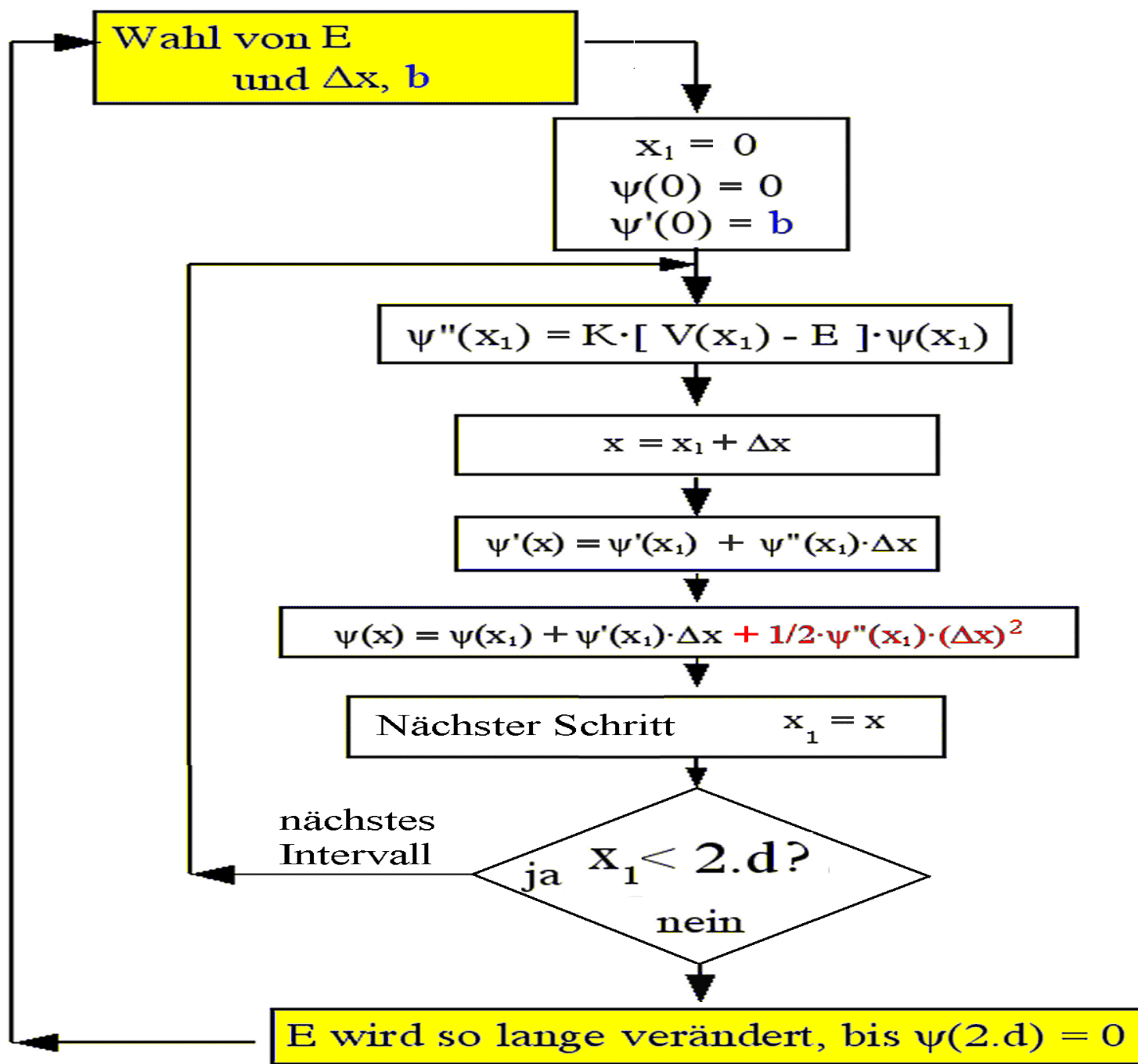
$$\psi(x+\Delta x) = \psi(x) + \psi'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \dots$$

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule



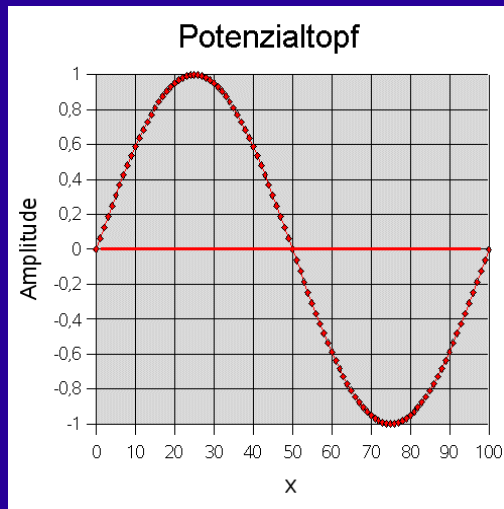
Flussdiagramm

Konvergenzbeschleunigung durch quadratischen Term (rot)



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Vorteil einer Tabellenkalkulation



Schüler erkennen:

UNENDLICH

- Eigenwertproblem zur Bestimmung von E
- nicht irgendwelche Mechanismen, wie Reflexion von Wellen („stehende Wellen“)
- Kein Zusammenhang zwischen „Wellenausbreitung“ und „Teilchenbewegung“
- Interferenz von **Möglichkeiten** und nicht von „etwas“

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Methode 3: Einsatz fertiger PC-Programme

"Schrödingers Schlange" Version 1.0 (Freeware)

Potential Ψ
Energie

Energieskala

0.00001 eV
0.1 eV 0.01 eV 0.001 eV 0.0001 eV

0 5 10 15

9

Momentane Energie:
9.43110 eV

Diese 5 Werte auf 0 stellen

Zuerst Potential wählen: Dann Energie an den Reglern rechts so einstellen, dass Ψ für große x nicht (oder für möglichst große x erst) divergiert!

Um die momentane Energie festzuhalten: Hier \rightarrow EWert1, usw. anklicken!

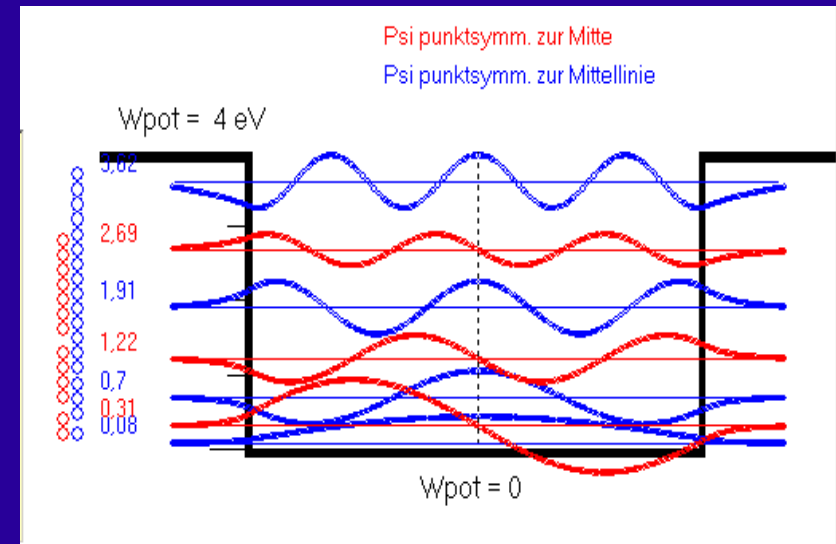
Doppelklick auf einen festgehaltenen Wert stellt das zugehörige Schaubild wieder her.

in eV löschen in eV
EWert1 x x EWert6
EWert2 x x EWert7
EWert3 x x EWert8
EWert4 x x EWert9
EWert5 x x EWert10

Alle Werte für dieses Potential löschen:
Alle löschen

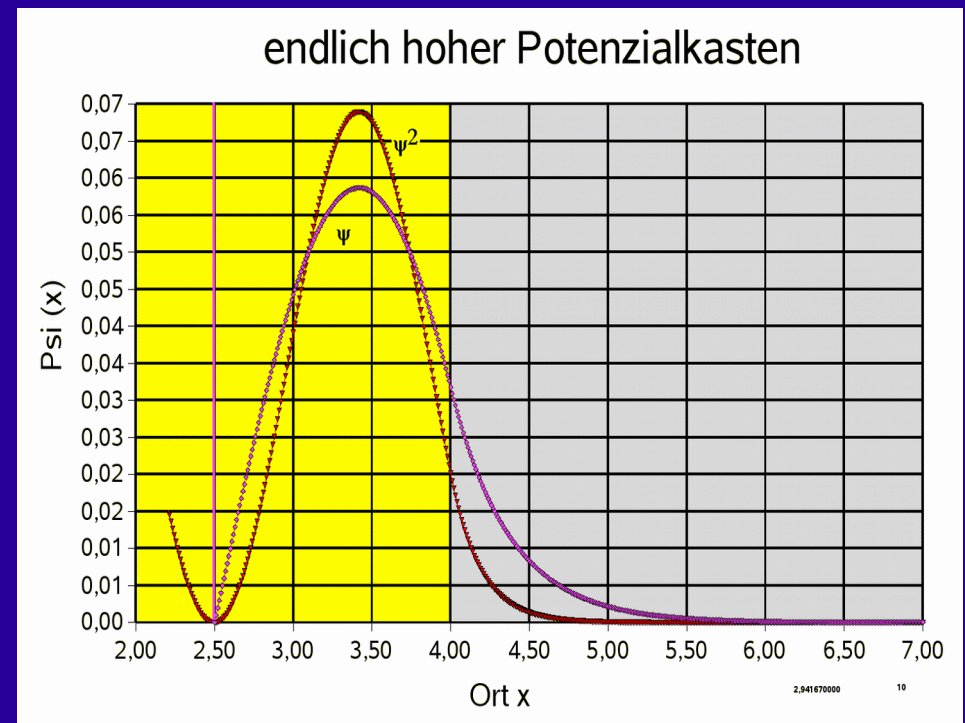
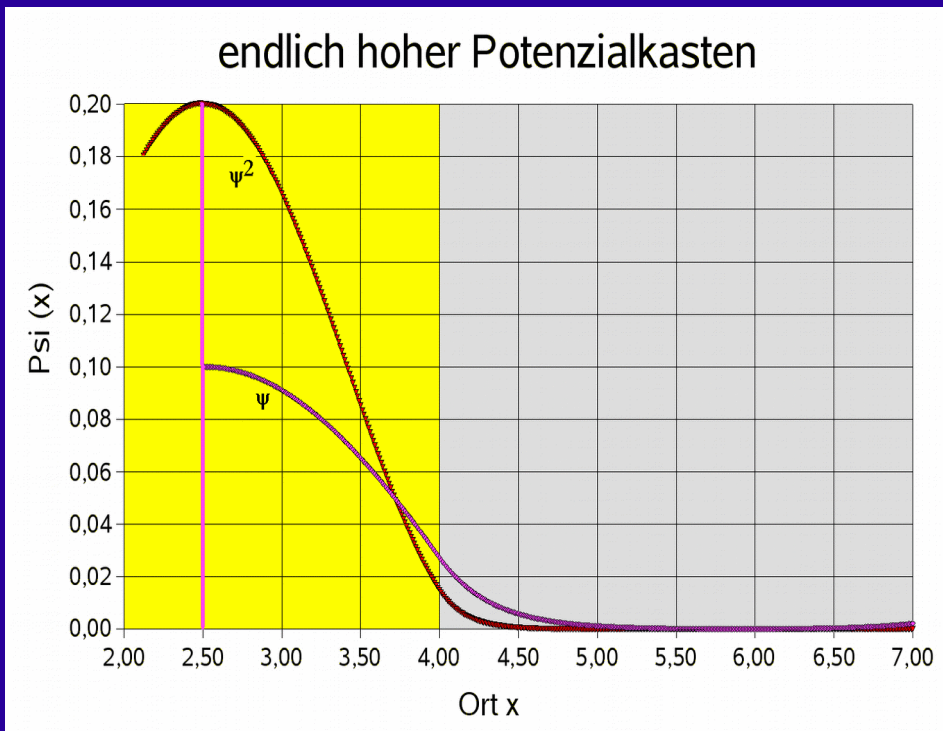
Zuerst Potential wählen: Coulomb-Potential Harmonisches Potential Topf endlicher Tiefe mit Topftiefe in eV: 10

Küblbeck: **Schrödingers Schlange**
Bader: **SCHRTOPF.EXE**



z.B. endlich tiefer Pot. Topf

Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule



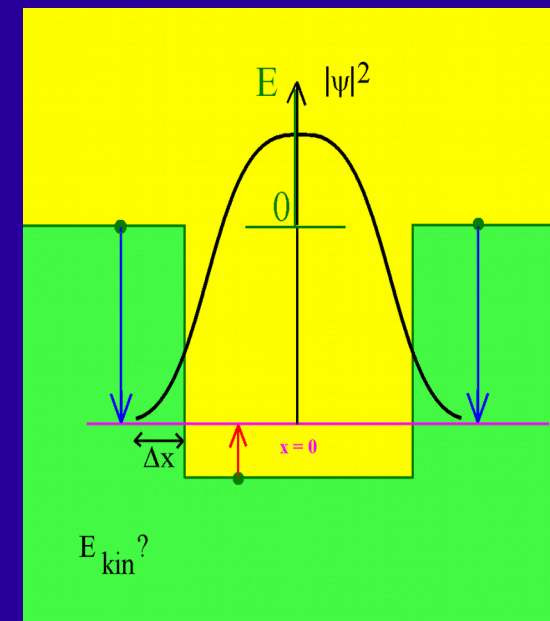
Ergebnisse einer Tabellenkalkulation für endlich tiefen Potenzialtopf (von 1 cm bis 4 cm; nach links symmetrisch fortzusetzen)

ENDLICH

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Diskussion:

- Das Teilchen ist auch außerhalb des endlich tiefen Potenzialtopfes zu finden. Nichts verbietet den Nachweis dort! Das Teilchen besitzt Gesamtenergie E , aber keine kinetische Energie!
- Die Gesamtenergie E ist für gebundene Zustände negativ!
- Die kleinste mögliche Energie (Grundzustandsenergie) ist höher als der Potenzialboden (Zusammenhang mit HUR; „Lokalisierungsenergie“).
- Oberhalb von $E = 0$ gibt es kontinuierlich verteilte Energien.



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Viel Anlass, sich zu wundern:

- **Alles oder nichts:** Wenn richtiger Energiewert exakt getroffen, dann physikalische Lösung, sonst nur unphysikalische Lösung
- Die SG liefert genau die experimentellen Energiewerte und sogar Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten, obwohl SG „vom Himmel gefallen“
- Klassische Eigenschwingungen stellen engste Analoga dar. Dennoch: dort sind auch Schwingungen bei benachbarten Frequenzen möglich
- Diskrete Energien haben nichts mit besonderen Formen der Potenzialkurve zu tun, die etwa mehrere Minima (stabilen Lagen) aufweisen würde (Milchkartondeckel). Nur Folge der Lokalisierung!
- **Messpostulat der QP:** Messwerte einer Observablen sind immer Eigenwerte:
Alle Zustände lassen sich aus stationären Zuständen überlagern!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- **IV Methodisches**
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

IV.1 Experten-Team-Verfahren

- Jedes Team besteht aus 2 Schülern
- getrennte, aber aufeinander abgestimmte Texte
- Schritt für Schritt wird jeder zum „Experten“
- jeder der „Experten“ instruiert dann seinen Partner über die neuen Erkenntnisse.

1 A/B Die Partner informieren sich über Grundlagen des Problems: Vom Farbstoff-Molekül zum klassischen Potenzialkasten

1A Partner A wird zum Experten: Klassisches Modell lang gestreckter Molekülketten

1B Partner B wird zum Experten: Was sagt die Quantenphysik zu klassischen Modellen?
(komplementäre Messgrößen wie E und p , E und E_{kin} ; 2 klassisch denkbare Möglichkeiten, zwischen denen nicht unterschieden wird: also Interferenz)

1A/B Die Experten informieren sich gegenseitig

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

2A Partner A wird zum Experten: Wir suchen "stationäre Zustände", d.h. Eigenzustände der Energie bzw. Zustände mit bestimmter Energie!

2B Partner B wird zum Experten: E und x , E und p_x nicht gleichzeitig existent/messbar: Es hat in solchen Zuständen keinen Sinn, von einer Bewegung des Teilchens zu sprechen.

2A/B Die Experten informieren sich gegenseitig

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

3 SL: Stark geführte Erarbeitung der Energiestufen durch Einpassen von halben Wellenlängen

4A Partner A wird zum Experten: Wie kommt es zur Ausbildung stehender Wellen? - HUR halbklassisch plausibel gemacht

4B Partner B wird zum Experten: Was bedeutet es, dass eine von 0 verschiedene Minimalenergie (Grundzustandsenergie) vorhanden ist?

4A/B Die Experten informieren sich gegenseitig

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

IV.2 Lernen an Stationen

in **Partnerarbeit** werden die Aufgaben gelöst, wobei **Hilfekärtchen** Anstöße geben können und **Lösungskärtchen** einen Vergleich bzw. eine Korrektur ermöglichen.

Station 1: Einpassen von Wellenfunktionen

Station 2: Interpretation von $|\psi|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte

Station 3: Von der Wahrscheinlichkeitsdichte zu Wahrscheinlichkeiten
(Integral)

Station 4: Lösungsansätze für ψ

Station 5: Normierung von ψ wegen Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Station 6: Nachweis, dass die Lösungsansätze die zuSG lösen

Station 7: Bedingung für physikalische Lösungen, angewandt für
„Schrödingers Schlange“ von Küblbeck oder fertige Tabellenkalk.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

IV.3 Fragebogenmethode

bei Interpretationsfragen gewählt - Auswahl zwischen vorgegebenen Antworten

PROBLEM: Wie kommt ein Teilchen in stationären Zuständen über den Knoten hinweg?

Aussage: Im linearen Potenzialkasten kommt ein Teilchen **nicht** über den Knoten hinweg, weil es sich dort nie aufhalten darf.

Kommentar: **Nein:** Denn stationärer Zustand wurde gewählt; hier gibt es keine Bewegung; Frage falsch gestellt

Aussage: Die stationären Zustände entsprechen nicht hin- und herlaufenden Teilchen; sie enthalten keinerlei Informationen über eine Bewegung der Teilchen. Keine sinnvolle Frage!

Kommentar: **Ja.** Das ist Kernpunkt!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

PROBLEM: Wie kommt ein Teilchen in stationären Zuständen über den Knoten hinweg?

Aussage: Ein Teilchen in stationären Zuständen ist nicht lokalisiert; es ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu beiden Seiten des Knotens zu finden.

Kommentar: Ja, aber nicht in dem Sinn, dass es zu beiden Seiten des Knotens „verschmiert“ ist oder sich dort gleichzeitig in Teilen aufhält. (Man findet es ja nur "ganz").

Aussage: Ein Teilchen hat in solchen Zuständen mit fester Energie keinen (be-stimmten) Ort. Dieser entsteht erst durch eine Ortsmessung. Wo das geschieht, ist eine Frage der Statistik gemäß dem Betragsquadrat der Welle.

Kommentar: Ja, das ist wieder der Kernpunkt!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

V.4 Lernen durch Lehren (Kurzreferate)

aufeinander abgestimmte 1-seitige Texte als Grundlage eines Kurzreferates (ca. 10 min), z.B.

- Absorption und Emission bei bestimmten lang gestreckten Farbstoff-Molekülen (anwendungsorientierte Hinführung zum Modell des Potenzialkastens)
- Klassische Betrachtung des linearen Potenzialkastens
- Grundsätzliche quantenphysikalische Aussagen zum linearen Potenzialkasten (z.B. dass E und E_{kin} nicht gleichzeitig Eigenschaften des Systems sein können, dass es bei stationären Zuständen keine Bewegung gibt)
- Energiezustände des linearen PK
- Wellenfunktionen beim LPK
- Simulationen zum unendlich hohen bzw. endlich hohen LPK („Schrödingers Schlange“)
- Strahlende Übergänge beim LPK (Auswahlregeln und auch Folgen des Pauli-Prinzips bei Mehrteilchenzuständen)



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

V Noch mehr zur Physik der
Wellenfunktionen im
Potenzialkasten

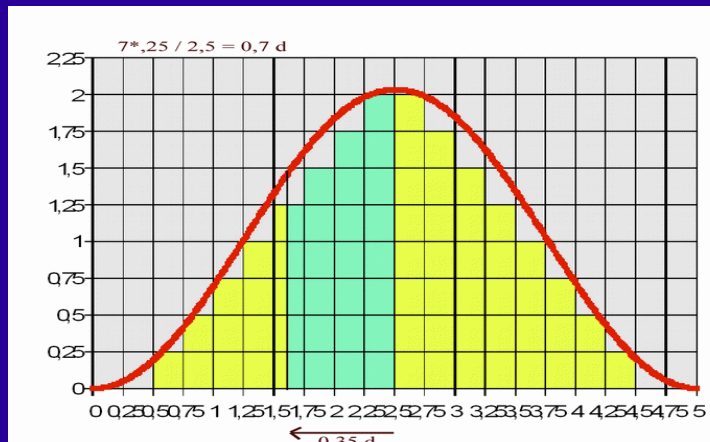
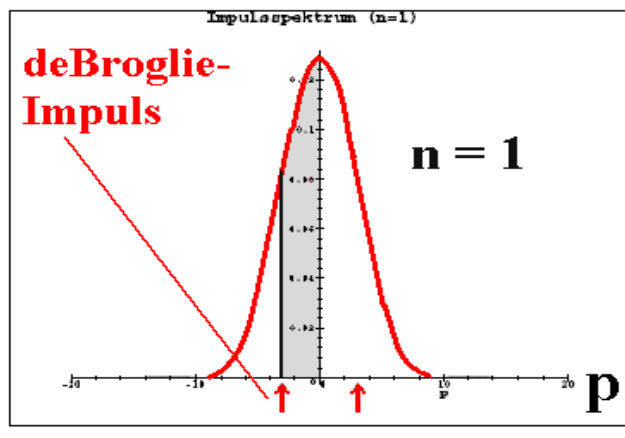
WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Ein Quanten-System sei in einen bestimmten Zustand präpariert worden. Für diesen Zustand seien x und p zwei nicht gleichzeitig messbare Größen.

Zukünftige Messwerte von x und p werden für den betrachteten (Grund-) Zustand so realisiert werden, dass sie innerhalb der Unbestimmtheiten streuen.

Ihr Produkt lässt sich nicht unter eine bestimmte Schwelle drücken:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq | \langle [x,p] \rangle / 2i | = \hbar/2 = h/4\pi$$



Abschätzung:

$$\Delta p \approx p = h/\lambda = h/4d$$

$$\Delta x \approx 0,35 d$$

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx h/4d \cdot 0,35 d \approx h/11,4 \quad 4 \cdot \pi \approx 12,5$$

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Energieeigenwerte in der Realität ?

Energien nicht so scharf, z.B.

- wegen Ankopplung des Quantensystems an das Strahlungsfeld
- SG ist dann nur Näherung, die das Strahlungsfeld vernachlässigt
- Insbesondere sorgt Ankopplung an das Strahlungsfeld für endliche Lebensdauer / Breite der Energieniveaus
- „Wunder“: Die HUR $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ beschreibt die nächstbessere Näherung: Je größer Δt , desto schärfer sind die Energieniveaus **CQED**

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Lebensdauer angeregter Zustände in Atomen typisch 10^{-8} s (vgl. Fluoreszenz bei Ionenschwingungen in Ionenfalle: Video)
- Lebensdauer angeregter Zustände in Rydberg-Atomen je nach Abstimmung des Hohlraumresonators bis 40 s (Quantensprünge)
- Scharfe Laserlinien und große Länge des Wellenzugs (typisch 200 m)

Jeweils Folgen der HUR: $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/2 \cdot \pi$

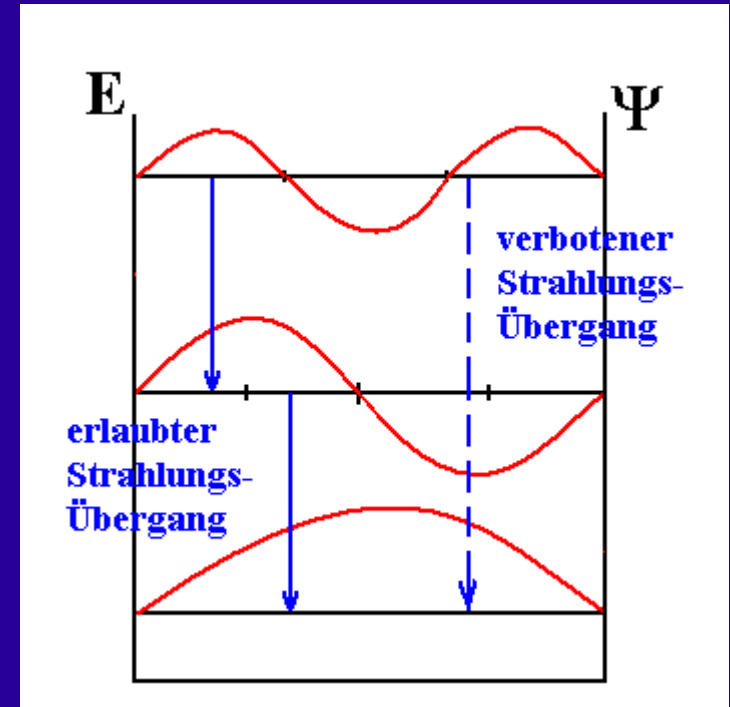
WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Auswahlregeln für strahlende Übergänge:

Bei Dipolstrahlung:

Anfangs- und Endzustand müssen unterschiedliche Symmetrie haben!

Bei höherer Multipolstrahlung werden auch verbotene Übergänge mit geringer Wahrscheinlichkeit möglich.



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

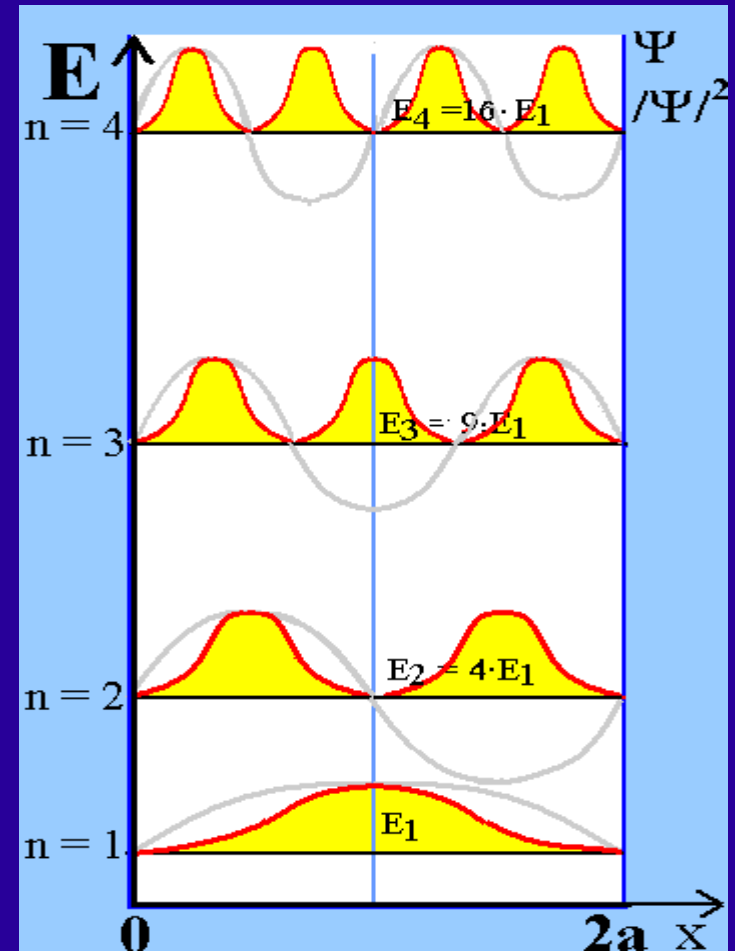
Was soll es heißen, wenn

„ein Elektron von einem Orbital zum anderen wechselt“ (Schulbuch 2009)?

„ ... so ist damit die Aufnahme oder Abgabe einer ganz bestimmten Energieportion verbunden“

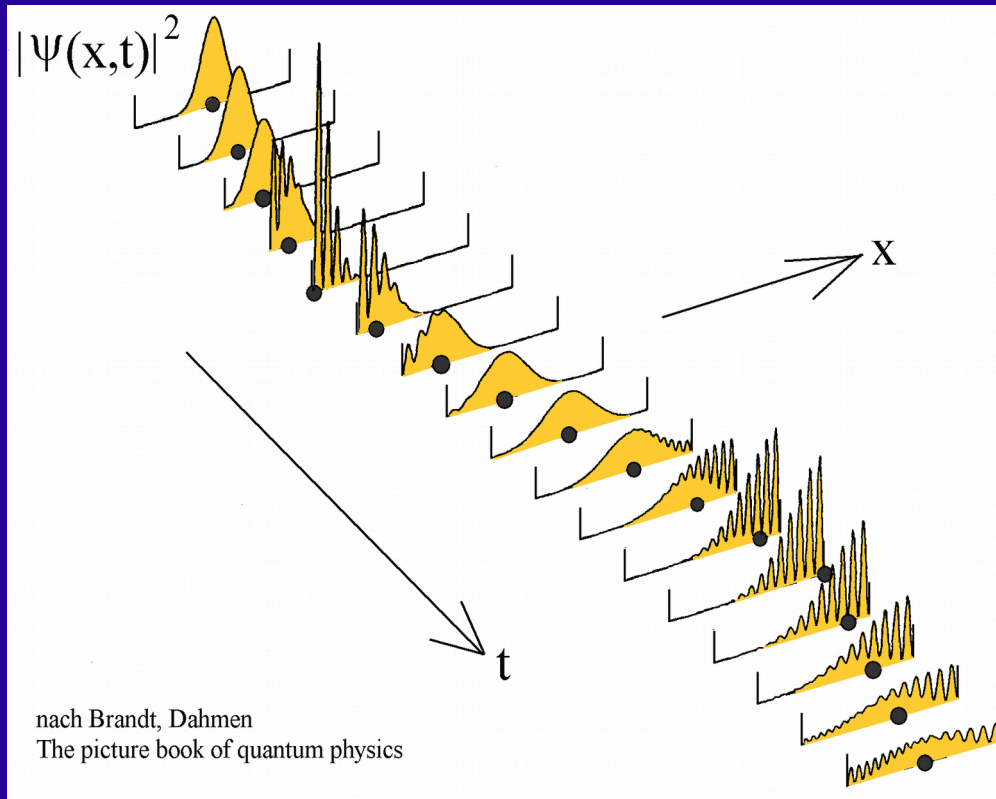
Was könnte das in einem Atom heißen ?

Auf keinen Fall räumlich zu verstehen!



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Hin und her laufende Teilchen?



Keine stationären Zustände

Wellenpakete aus überlagerten stationären Zuständen mit komplexen Exponentialfaktoren $e^{iE.t/\hbar}$:

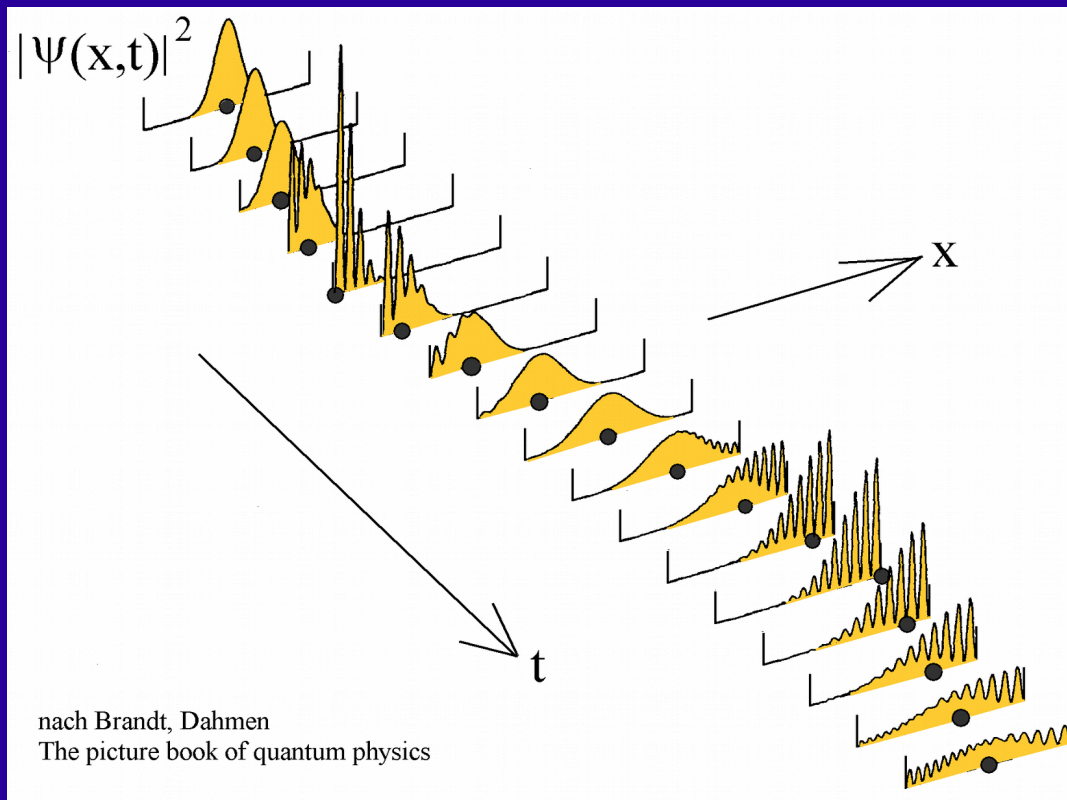
Klassische Schrödinger-Theorie (1926) - zunächst sehr suggestiv:

„Teilchen sind Wellenpakete / werden durch WP beschrieben“ ???

Aber:

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Hin und her laufende Teilchen?



- Wellenpakete „fließen auseinander“ (in der Regel)!
- Keine Wechselwirkung zwischen Teilen der „Ladungswolke“!
- Bei 2 Teilchen schon 6-dimensionale Wellen!
- Wellenpakete beschreiben /repräsentieren nicht Teilchen, sondern Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten an Teilchen
- **Seit den 30-er Jahren geklärt: Elektronen im Potenzialkasten / Atom *sind* nie stehende Wellen!**

WQPK - Grundfakten der Quantenphysik und heuristische Methoden in der QP an der Schule

Ablehnung der Wellikel-Vorstellung („Elektron (z.B.) zugleich Welle und Teilchen“)

Heisenberg: Welle-Teilchen-Problematik bezieht sich auf alle Materie, nicht eine besondere Eigenschaft einer bestimmten Teilchensorte

Auch Teilchen mit komplizierter innerer Struktur (z.B. Fullerene) verhalten sich bei bestimmten Fragestellungen quantentheoretisch wie einheitliche, strukturlose Quanten-Teilchen

WQPK - Grundfakten der Quantenphysik und heuristische Methoden in der QP an der Schule

Ablehnung der Wellikel-Vorstellung („Elektron (z.B.) zugleich Welle und Teilchen“)

Heisenberg: Welle-Teilchen-Problematik bezieht sich auf alle Materie, nicht eine besondere Eigenschaft einer bestimmten Teilchensorte

Auch Teilchen mit komplizierter innerer Struktur (z.B. Fullerene) verhalten sich bei bestimmten Fragestellungen quantentheoretisch wie einheitliche, strukturlose Quanten-Teilchen

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Wellen (Wellenfunktionen, Wellenpakete) taugen nicht zur *Beschreibung* von Teilchen, sondern nur zur Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse an Teilchen.

- Zeilinger: „Diese Wellen gibt es nur in den Köpfen der Physiker“

- Das Betragsquadrat der Wellenfunktion gibt **keine Teilchendichte** („Ladungsdichte“, „Elektronendichte“) einer vermeintlichen "Ladungswolke" oder eine "Photonendichte" wieder, sondern ausschließlich die Nachweiswahrscheinlichkeit in einem Intervall der Breite Δx :

- $|\psi(x)|^2 \Delta x.$

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- IV Methodisches
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- **VI Tunnel-Effekt**
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

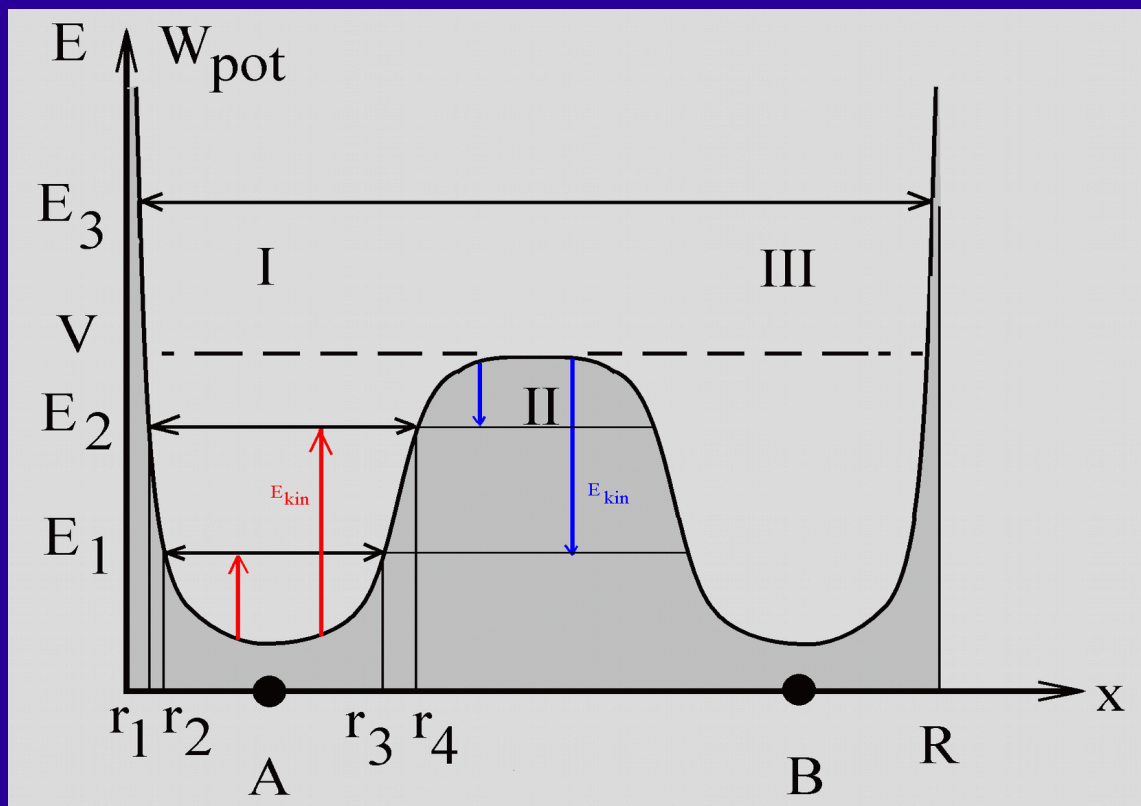


WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Die Brisanz des Tunneleffekts ergab
sich aus einer falschen Überlegung:**

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Zum Tunneleffekt



Klassisch ist für E_1, E_2 der Durchtritt durch Bereich II verboten, weil E_{kin} dort negativ

Argument nicht anwendbar, da Teilchen in Zuständen bestimmter Gesamtenergie E keine E_{kin} und E_{pot} haben können!

Nichts verbietet den Nachweis von Teilchen in allen drei Bereichen!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Grobes Modell für 2-atomiges Molekül

1. Das System hat kinetische Energie nicht als Eigenschaft!

2. Messung von E_{kin} im Bereich II:

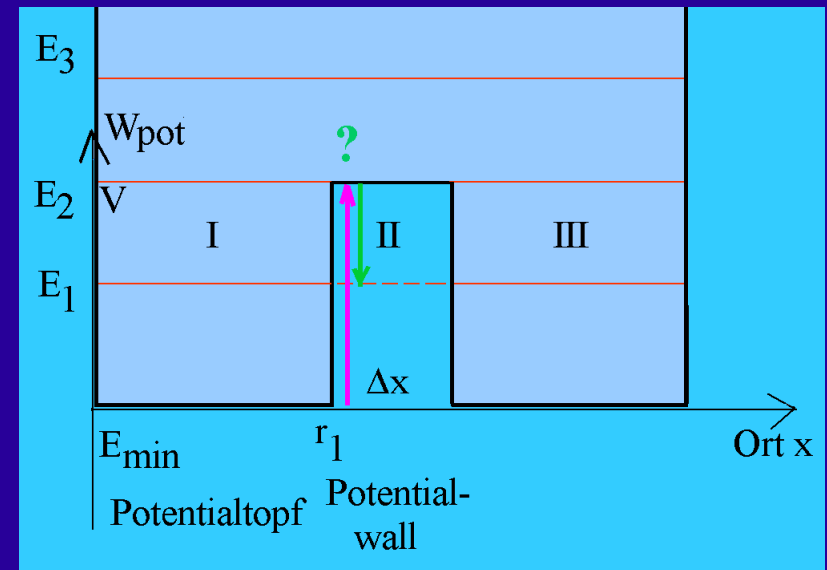
Ort mit Unbestimmtheit Δx festgelegt

=> Impuls-Unbestimmtheit $\Delta p_x \geq \hbar / \Delta x$

=> Unbestimmtheit der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin}} = \Delta p_x^2 / 2m \geq \hbar^2 / (\Delta x^2 \cdot 2m)$

Messwerte für E_{kin} können V weit überschreiten!

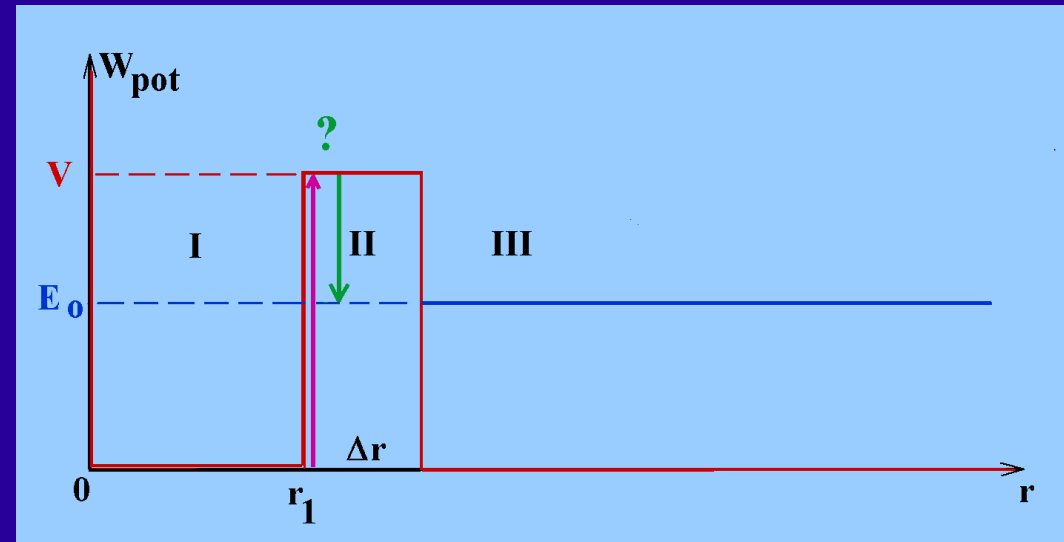
Nichts verbietet den Nachweis von Teilchen in allen drei Bereichen!



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Grobes Modell für α -Zerfall

1. E_{kin} nicht Eigenschaft
2. Messung von E_{kin} im Bereich II:



Ort mit Unbestimmtheit Δr festgelegt
 \Rightarrow Impuls-Unbestimmtheit $\Delta p_r \geq \hbar / \Delta r$

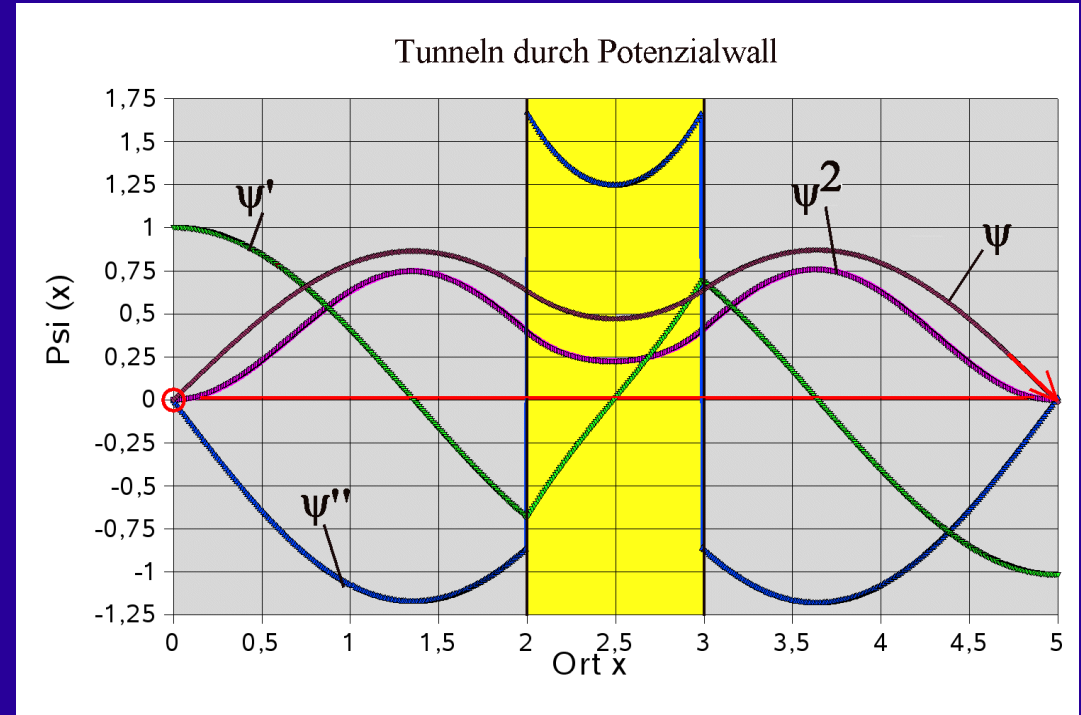
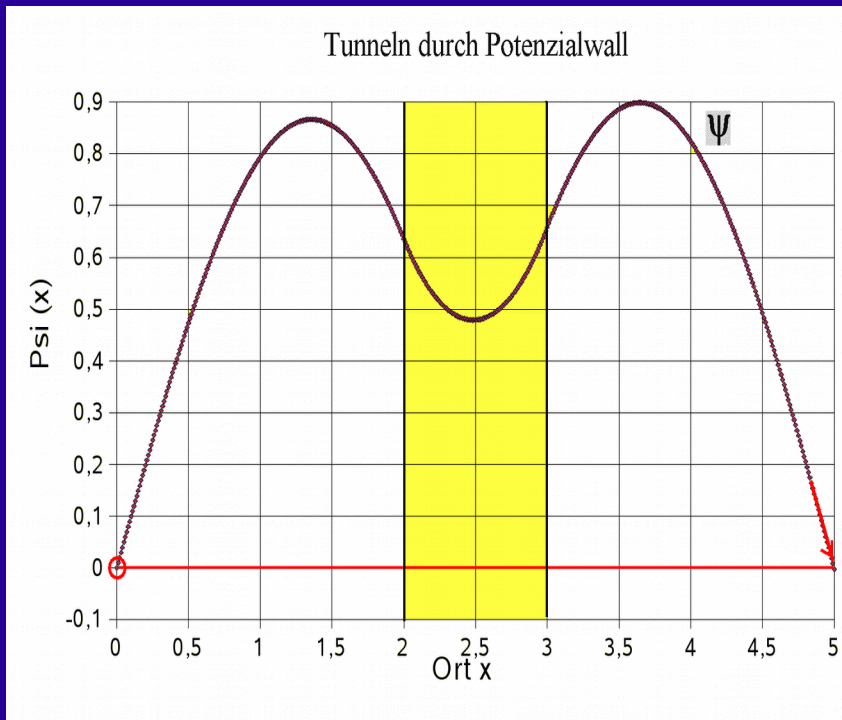
\Rightarrow Unbestimmtheit der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin}} \approx \Delta p_r^2 / 2m \geq \hbar^2 / (\Delta r^2 \cdot 2m)$

Messwerte für E_{kin} können V weit überschreiten!

Nichts verbietet den Nachweis von Teilchen im Außenraum!

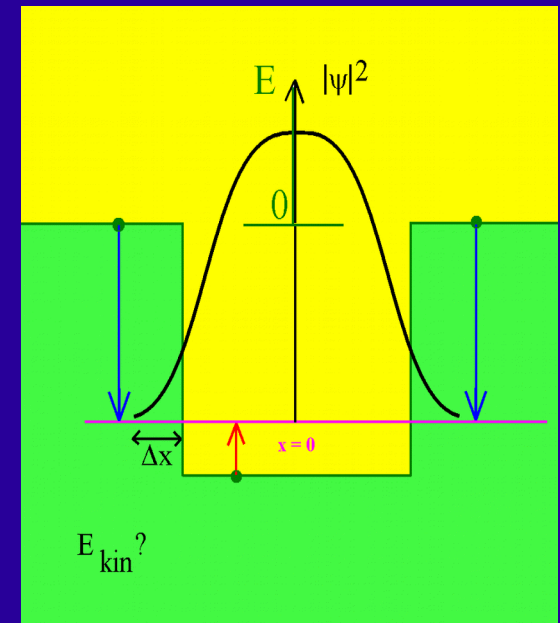
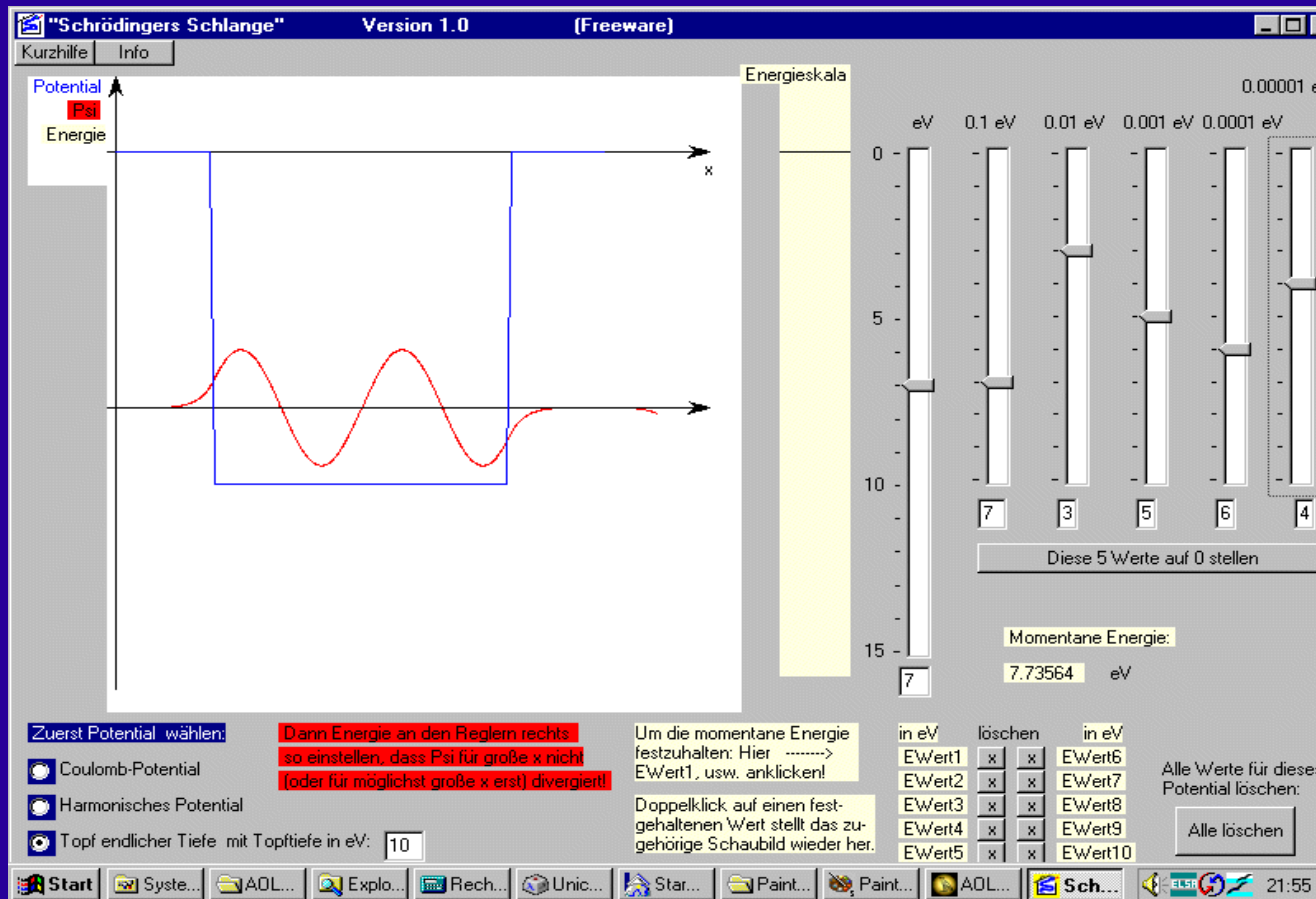
WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Ergebnis einer Tabellenkalkulation („Schießen“)



SCHIESSEN

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule



Negative E_{kin} in der Potenzialwand?

Nein!

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Es gibt keinen Grund, sich über das "Eindringen" in die Potenzialwand zu wundern,

außer,

wenn man **fälschlicherweise** annimmt, dass die Teilchen zugleich Gesamtenergie E und kinetische Energie E_{kin} als Eigenschaft besitzen.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- IV Methodisches
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- VI Tunnel-Effekt
- **VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen**
- VIII Resümee

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen:

$$i \hbar \psi' = H \psi$$

1. Die SG der klassischen Schrödinger-Theorie (1926) für 1 Teilchen in R_3
2. Die SG der nichtrelativistischen Schrödinger-Feld-Theorie (ab ca. 1930): wie elm. Wellen im 3-dim. Ortsraum, aber Operator-Gleichung

3. Die SG der Quantenmechanik (> 1926)

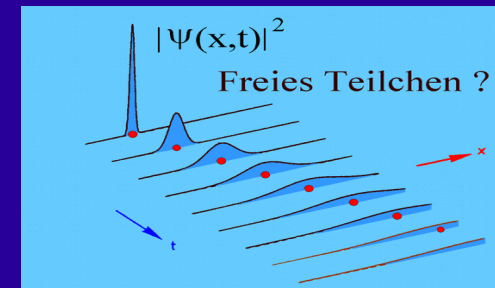
Wellen im evtl. hochdimensionalen Konfigurationsraum !

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Versagen der klassischen Schrödinger-Theorie („Wellikel“)

- fehlende elektrostatische Wechselwirkung
- Auseinanderfließen von "Teilchen"
- Teilchenzahl schlecht integrierbar (SG überlebt für 1 Teilchen)
- Absurditäten beim Messvorgang (Sakurai: "bizarre Konsequenzen"): "Reduktion des Wellenpakets" (Feynman: "und andere Albträume")
- ein Elektron hat **scheinbar** gleichzeitig bestimmte Gesamtenergie E und bestimmte potenzielle Energie V ; Widerspruch zur HUR:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = [E - V(x)] \Psi(x,t)$$





WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- IV Methodisches
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII **Resümee**

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

VII Resümee

- Die Mathematik des eindimensionalen unendlichen Potenzialtopfes ist relativ einfach, die Physik dazu erfordert jedoch genauere Kenntnisse darüber, was man eigentlich macht.
- Mit der zeitunabhängigen SG werden ausschließlich stationäre Zustände mit einer bestimmten Gesamtenergie E gesucht. Sie entsteht aus der SG durch Abseparieren des Zeitanteils.
- In Zuständen bestimmter Gesamtenergie E (stationären Zuständen) haben E_{kin} und E_{pot} keinen physikalischen Sinn. Alle Argumentationen mit ihnen gehören ins Reich der Fantasie.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Auch eine **Bewegung** oder ein „Aufenthalt“ eines Teilchens an einem bestimmten Ort hat bei stationären Zuständen **keinen physikalischen Sinn**.
- **Kein Argument verbietet den Nachweis eines Teilchens in einem Potenzialwall oder einer endlich hohen Potenzialwand (Tunneleffekt)**.
- Für die Schule geeignete **Lösungsmethoden** sind verifizierte Ansätze, Tabellenkalkulation und bestimmte fertige PC-Programme, mit denen erlaubte E-Werte gesucht werden. Kriterium dafür sind Endlichkeit der Wellenfunktion (Quadratintegrabilität) bzw. die Randbedingungen.
- Bei aller relativen Einfachheit der Formalismen muss ein **Staunen über die Mächtigkeit der SG mit/trotz ihrer Lösungsvielfalt verbleiben**.

WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

• Es werden eine Reihe von Unterrichtsmethoden empfohlen wie **Experten-Team-Verfahren, Lernen an Stationen, Methode „Sichere Leine“, Lernen durch Lehren (Kurzreferate) und die Fragebogenmethode zu Interpretationsfragen. Zu all diesen Verfahren hat der Autor Unterrichtsmaterialien zur Verfügung gestellt:**

• **Horst Hübels, Schüleraktivierende Unterrichtsmaterialien zur Quantenphysik Teil 3 Grundlagen der Atomphysik, BoD 2008, ISBN-13 978-3-8370-1321-4**





WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Quantenteilchen sind anders!

Aber sie sind Teilchen !

Sie sind niemals Wellen !



WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

<http://www.forphys.de>

Hier finden Sie u.a. auch den ausführlichen
Text dieses Vortrags (und früherer) und Vieles
mehr.



**WQPK - Der eindimensionale Potenzialtopf
und der Tunneleffekt in der Schule**

ENDE

Vielen Dank!

Das Würzburger Quantenphysik-Konzept

Was ist das Besondere des didaktischen
Würzburger Quantenphysik-Konzepts?

Vorwiegend für Lehrer:

Unterrichtsmaterialien:

**Vorwiegend für Schülerinnen und
Schüler:**

Online-Lehrtext

Was Sie schon immer über Quanten wissen wollten

(Druckversion des Lehrtexts)

ISBN 978-3-8370-8714-7

Schulversuche zur Quantenphysik

(noch unvollständig)

Grundfakten der Quantenphysik

Weitere Online-Materialien zur Quantenphysik

Schüleraktivierende Unterrichtsmaterialien zur Quantenphysik - Teil 1:

Auf dem Weg zur Quantenphysik

ISBN 978-3-8370-1320-7

Schüleraktivierende Unterrichtsmaterialien zur Quantenphysik - Teil 2:

Grundfakten der Quantenphysik und Heuristische Methoden

ISBN 978-3-8370-0630-8

Schüleraktivierende Unterrichtsmaterialien zur Quantenphysik - Teil 3:

Grundlagen der Atomphysik

ISBN 978-3-8370-1321-4

Grundlagen der Quantenphysik - Das Schülerbuch

ISBN 9783842347489

Online-Glossar zur Quantenphysik

Online: Wissenschaftliche Experimente zur Quantenphysik

Online: Texte für Schüler

- Ungewiss - Un-be-stimmt
- Wellen-Interferenz und Einteilchen-Interferenz
- Müssen wir die klassische Physik ganz
vergessen?