# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

"

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- **IV Methodisches**
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen
- 
- VI Tunnel-Effekt
- 
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Das sollte selbstverständlich sein:

- dass in der Schrödinger-Theorie Wellen vorkommen (Wellenfunktionen), allerdings in Konfigurationsräumen, die meist hochdimensional
- dass Schrödingersche Wellenfunktionen für Teilchen-Zustände gelten und nur Wahrscheinlichkeits-Vorhersagen für künftige Messungen machen
- dass Wellenfunktionen keine Wellen im Anschauungsraum sind (Zeilinger: „nur im Kopf der Physiker“)

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Was steckt der Lehrer in die Lösungsvielfalt hinein, wenn er sich auf die „zeitunabhängige SG“ (zuSG) beschränkt?**

In welchem Sinn ist die zuSG eine quantenphysikalische Grundgleichung?

Lehrplan

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Ziel:**

Lösung der (zeitabhängigen) Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \dot{\psi} = H \psi$$

mit Anfangs- und Randbedingungen.

**Willkürliche Entscheidung:**

aus der Vielzahl der Lösungen sollen nur diejenigen interessieren, die

- zu Teilchenzuständen (1, 2, 3 Teilchen ... ) gehören,
- bei denen wiederholte Energiemessungen (am jeweils gleich präparierten System) stets gleiche E-Werte liefern.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

d.h. ausschließlich „stationäre Zustände“ gesucht. Bei ihnen ist die Gesamtenergie E eine Eigenschaft des Systems (E ist be-stimmt).

Also: Wenn eine ideale Energiemessung durchgeführt wird: ( $H \psi$ ) ergibt sich ein eindeutiger Messwert E, und der Zustand wird nicht verändert ( $E \psi$ ):

$$H \psi = E \psi$$

(bei anderen Zuständen liefert die Energiemessung eine Linearkombina-tion von Energieeigenzuständen mit unterschiedlichen Energien $E_i$.

Solche Zustände sollen ausgeschlossen sein! ($H \psi = \Sigma c_i E_i \psi_i$ )

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Folgerung:**

- In den gesuchten stationären Zuständen sind kinetische und potenzielle Energie un-be-stimmt, d.h. nicht Eigenschaft des Systems.
- Wenn Sie von der Gesamtenergie E sprechen, hat es keinen physikalischen Sinn von kinetischer oder potenzieller Energie zu sprechen. E dagegen ist be-stimmt.
- Messungen würden für $E_{kin}$ und $E_{pot}$ streuende Messwerte liefern!
- Eine Teilchenbewegung ($E_{kin}$) oder Aufenthalt an einem bestimmten Ort ($E_{pot}$) sind in solchen Zuständen reine Fantasie!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Jedoch:

**Konkurrenz zweier „klassisch denkbarer Möglichkeiten, zwischen denen nicht unterschieden wird“:**

**Interferenz**

(=> örtlich variierende Wahrscheinlichkeiten)

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Die zeitunabhängige SG (zuSG)

Wegen der Messvorschrift $H\,\psi = E\,\psi$ wird die SG

$$i\,\hbar\,\dot{\psi} = E\,\psi$$

erfüllt durch den Lösungsansatz:

$$\psi(x,t) = \psi_0(x)\,e^{-iEt/\hbar}$$ und es gilt für den Ortsanteil:

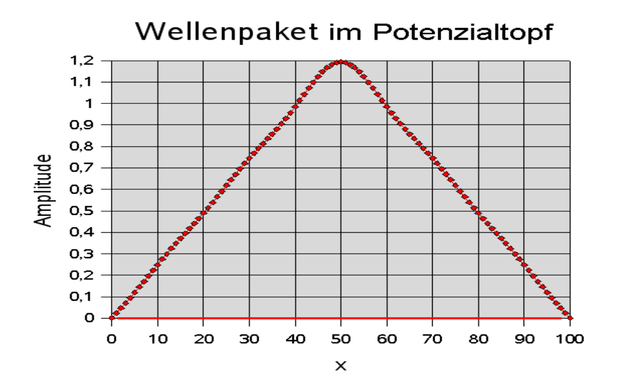
$$H\,\psi_0(x) = E\,\psi_0(x)$$

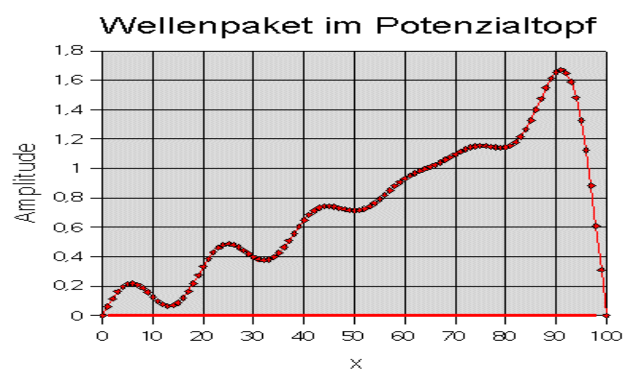
Das ist die zuSG für den Ortsanteil der Wellenfunktion in stationären Zuständen.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Wir Lehrer wissen:

· Die zuSG ist nur für die stationären Lösungen der SG zuständig




- $\psi$ (x,t) i.A. komplexwertig - also keine messbare ('reale') Größe, sondern Rechengröße mit der einzigen Aufgabe, experimentell überprüfbare Wahrscheinlichkeitsaussagen für den Ausgang zukünftiger Messungen zu liefern
- Zeilinger: „nur in den Köpfen der Physiker“
- Es ist sinnlos, von einer Ausbreitung solcher Wellen im uns umgebenden Raum, dem Anschauungsraum, zu sprechen.

## Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

# Es handelt sich um Wellen im Konfigurationsraum

- z.B. im dreidimensionalen Impulsraum (bei 1 Teilchen), oder
- im dreidimensionalen Ortsraum (bei 1 Teilchen),
- im 6-dimensionalen Ortsraum (bei 2 Teilchen)

$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ $\mathbf{x}_1$ : Koordinaten des Punktes, an dem am Teilchen 1 eine Messung vorgenommen werden soll, $\mathbf{x}_2$ ....

# Bei stationären Zuständen gibt es keine Bewegung im Anschauungsraum!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

"

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- **III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?**
- IV Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- V Methodisches
- V Tunnel-Effekt
- VI Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VII Resümee

- **III Was davon könnte/sollte im Unterricht gebracht werden?**

- Möglichst wenig!

Aber der Lehrer braucht das Hintergrundwissen!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Bitte versuchen Sie nicht, die SG im Unterricht herzuleiten!

Üblicher Vorschlag:

Ausgang von deBroglie-Wellen: $\psi(x,t) = A.e^{i\,(p.x-E.t)/\hbar}$ [$A.\sin(p.x - E.t)/\hbar$ ]

Dann gilt: $\psi\,'(x,t) = ip/\hbar\,\psi(x,t)$ und $\psi\,''(x,t) = -p^2/\hbar^2\,\psi(x,t)$

und mit $E\,\psi(x,t) = p^2/2m\,\psi(x,t)$ ist damit der

Operator der 2. Ableitung als

Operator der kinetischen Energie identifiziert, also

$$\psi''(x,t) = -2m/\hbar^2\,E\,\psi(x,t) \qquad \psi''(x,t) = -K\cdot E_{kin}\,\psi(x,t)$$

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

[ $\psi''(x,t) = - K \cdot E_{kin}\, \psi(x,t)$ ]

Dann – fälschlicherweise :

Bei Teilchen in einem Potenzial unterscheide sich die kinetische Energie von der Gesamtenergie E um die potenzielle Energie V(x), also

$$\psi''(x) = - K\, [\, E - V(x)\, ]\, \psi(x) \quad , \quad \text{wobei } K = 2m/\hbar^2$$

Für konstantes V(x) mit E > V entspricht das der Schwingungsgleichung

Für konstantes V(x) mit E < V exponentielles Verhalten

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Diese „Herleitung“ erscheint nicht sinnvoll, weil sie der Physik widerspricht.

- Teilchen in den gesuchten stationären Zuständen können keine potenzielle Energie und kinetische Energie haben!

- => V(x) nur eine formale Potenzialfunktion mit gleicher mathematischer Gestalt wie die potenzielle Energie beim entsprechenden klassischen Problem

- **Könnten Sie im Unterricht den Widerspruch bewältigen:**
  - V(x) sieht aus wie die potenzielle Energie, ist aber keine ?
  - $E_{kin} = E - E_{pot}$ soll verwendet werden, aber es gibt keine $E_{kin}$?

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Vorschlag:

**ZuSG kommentarlos anschreiben und mitteilen:**

- V(x) ist nicht $E_{pot}$, sondern die Potenzialfunktion mit gleicher Form wie die potenzielle Energie eines klassischen Teilchens am Ort x

- $E_{kin}$ und $E_{pot}$ sind für die gesuchten Lösungen physikalisch sinnlose Begriffe

## Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

# Born'sche Wahrscheinlichkeitsdeutung:

$/\,\psi\,/^2\,\Delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit,

bei einer Messung ein Teilchen im Intervall der Breite $\Delta x$ zu finden

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Wie sieht eine korrekte physikalische Lösung aus?

1. $\psi(x)$ muss quadratintegrabel sein, vereinfacht zu „endlich sein“

2. $\psi(x)$ muss die Randbedingungen erfüllen:

   $\psi(x)$ überall stetig und diff'bar,
   $\psi'(x)$ überall stetig und endlich

statt 2: $\psi(x) = 0$ an den Rändern eines Potenzialkastens mit unendl. Wänden

## Nur für bestimmte (diskrete) Energien erfüllbar!

# Die Mathematik der zuSG ist relativ einfach zu verstehen!

- Leicht überprüfbare Lösungsansätze
- Tabellenkalkulation
- PC-Programme, bei denen Testwerte E für physikalische Lösungen gesucht werden

# Grundfakten der Quantenphysik und heuristische Methoden in der QP an der Schule

Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialkasten:

$$\psi''(x) = - K\,E\,\psi(x) \quad , \quad \text{wobei } K = 2m/\hbar^2 \quad \text{für } 0 < x < 2\cdot d$$

Entspricht SG eines freien Teilchens oder einer Schwingungsgleichung.

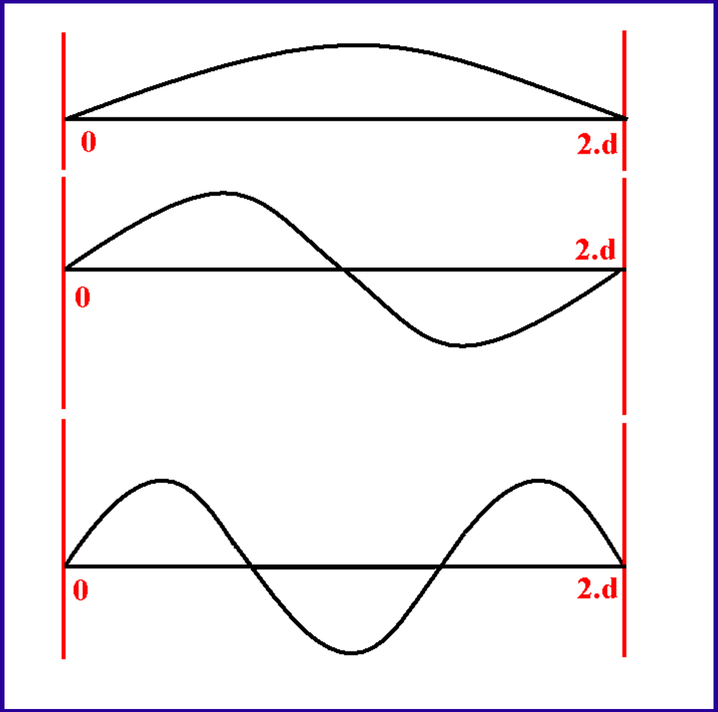
Wegen anderer Randbedingungen $\psi(0) = 0$ und $\psi(2\cdot d) = 0$

andere Lösungen als für freies Teilchen. Nur physikal. Lösungen gesucht!

(Identische Gleichungen haben offenbar nicht identische Lösungen)

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Melthode 1a: Was weiß man über die Lösungen?




1. Ortsanteil muss an den Rändern verschwinden

2. Er muss quadratintegrabel (endlich) sein

3. kein Grund erkennbar, weshalb der Ortsanteil komplexwertig

(Nullstellen und Extreme wie bei Sinus, ... oder Potenzfunktionen, ... )

# Melthode 1a: Lösungsansatz

$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$ dann folgt:

$\psi'(x) = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x)$ und

$\psi''(x) = - k^2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x)$

Also: $\psi''(x) = - k^2 \,.\, \psi(x)$ *)

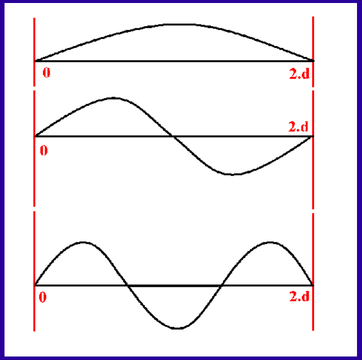
Ein Vergleich mit der zuSG [ $\psi''(x) = - 2m/\hbar^2\, E \,.\, \psi(x)$ ] liefert

$k^2 = 2m/\hbar^2\; E$

Damit ist der Ansatz bestätigt für solche E- oder k-Werte.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$




**E bzw. k sind nach wie vor unbekannt.**

Die letzte Nullstelle des sin ist bei $k \cdot 2 \cdot d = n \cdot \pi$ ( $n \varepsilon$ N)

Damit ist $k = n.\pi / 2.d$ bekannt, und es gilt

$E = \hbar^2/2m.k^2 = \hbar^2/2m\,( n.\pi / 2.d )^2 = h^2/(32d^2m)\, n^2$ ( $n \varepsilon$ N)

**Diskussion:**

$E_n = E_1\, n^2$ ( $n \varepsilon$ N) $E_1$ Grundzustandsenergie, quadratisches Wachstum mit n

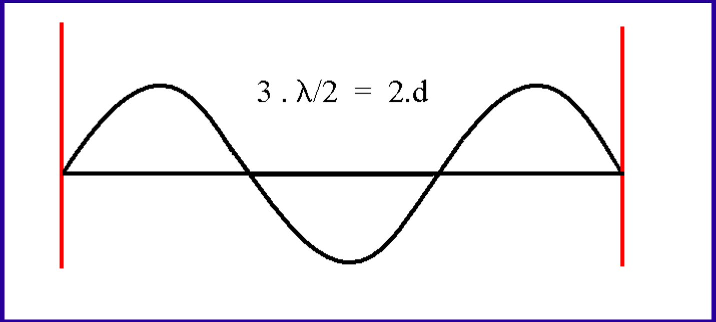
# 1b: Alternative Methode ?

**Einpassen von halben Wellenlängen** im Zusammenhang mit einer deBroglie-Wellenlänge $\lambda$ : $p = h/\lambda$ , also

$n\,\lambda/2 = 2\cdot d \quad (n \in N)$

Dann $p = h/4d \cdot n$ und

$E = p^2/2m = h^2/(32d^2m) \cdot n^2 \quad (n \in N)$



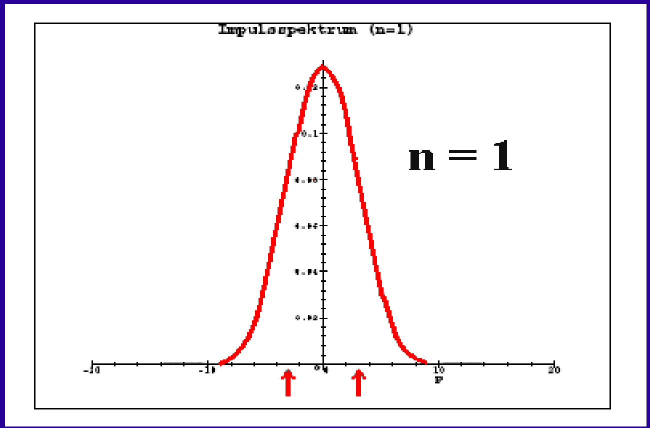

Sehr suggestiv und einfach, aber .... ?

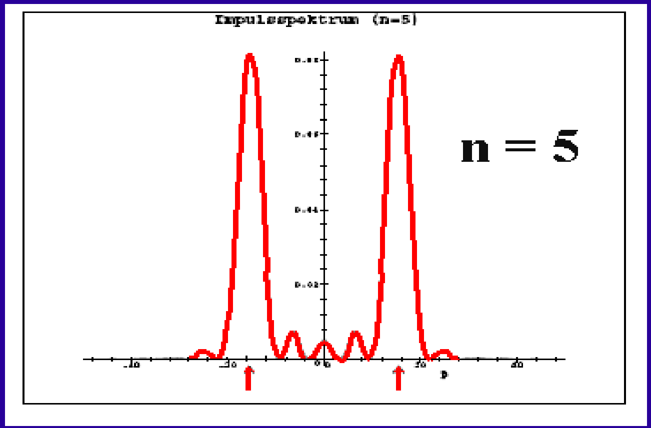
# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

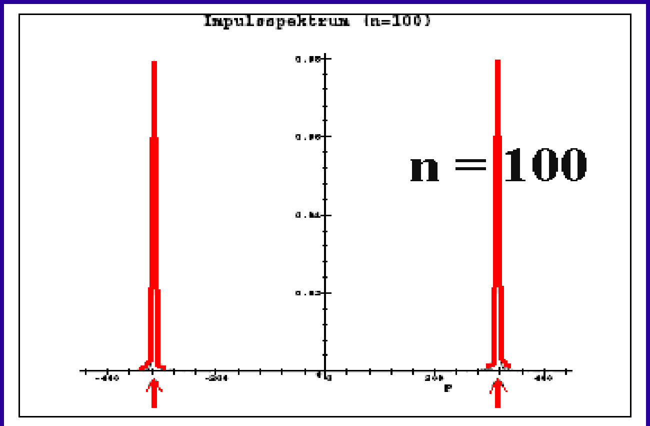
## Einwände:

Es gibt in solchen Zuständen keine bewegten Teilchen, die einen Impuls haben könnten; E und p sind nicht gleichzeitig messbar!

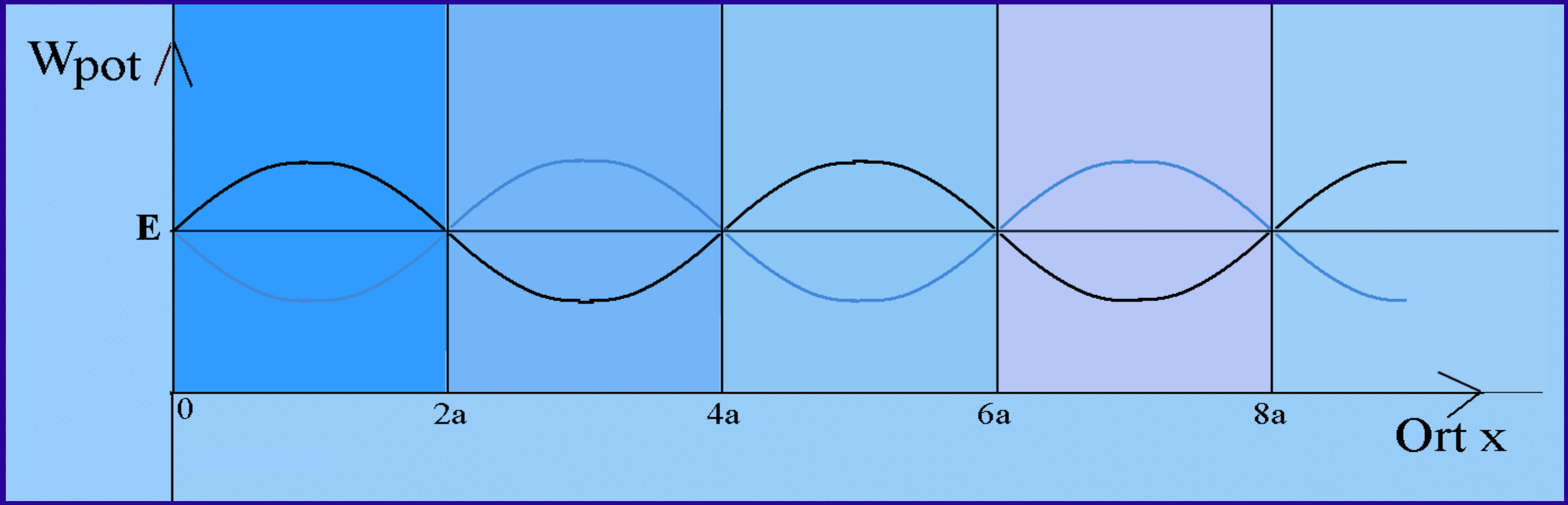
Impulsspektrum durch **Fouriertransformation in den Impulsraum** leicht erhältlich (Abb. nach Wiesner und Berger):



# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule




**Aneinanderreihung beliebig vieler unabhängiger, aber identischer Potenzialtöpfe (Kronig-Penning-Modell)**

Kein Einfluss auf Ortsabhängigkeit d. Wellenfunktion für $0 < x < 2d$, aber Fouriertransformation liefert scharfe Impulse +/-p.

## Zur Einpassung halber Wellenlängen:

Wir verstehen jetzt, weshalb das Einpassen halber Wellenlängen zum richtigen Ergebnis führt.

Der Weg bleibt problematisch, da er zu falscher Argumentation führt oder aufwändig begründet werden müsste.

## Diskussion der Lösung:

Wie kommt das Teilchen über die Nullstellen der Wellenfunktion hinweg, obwohl es sich dort nie „aufhalten“ kann?

Was antworten Sie darauf, wenn Ihre Referendare Sie so fragen?

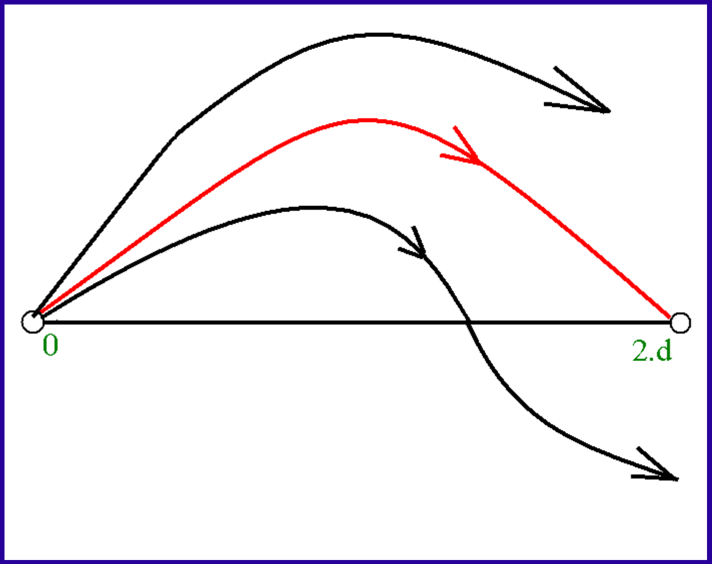
- Frage falsch gestellt: Die Nachweiswahrscheinlichkeit in jedem Punkt ist 0. Aber es gibt kein endliches Intervall $\Delta x$, wo sie 0 sein könnte!
- Es „kommt nicht“: keine Bewegung und kein „Aufenthalt“ irgendwo ohne eine Messung ! Stationärer Zustand!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## **Methode 2**: Tabellenkalkulation „Schießen“

$\psi''(x,t) = - K \cdot E \cdot \psi(x,t)$ für $0 < x < 2d$ zu lösen mit Randbedingungen

Wahl von E, $\psi(0)$, $\psi'(0)$; $\psi''(x)$ jeweils aus SG




$$\psi'(\Delta x) = \psi'(0) + \psi''(0) \cdot \Delta x$$

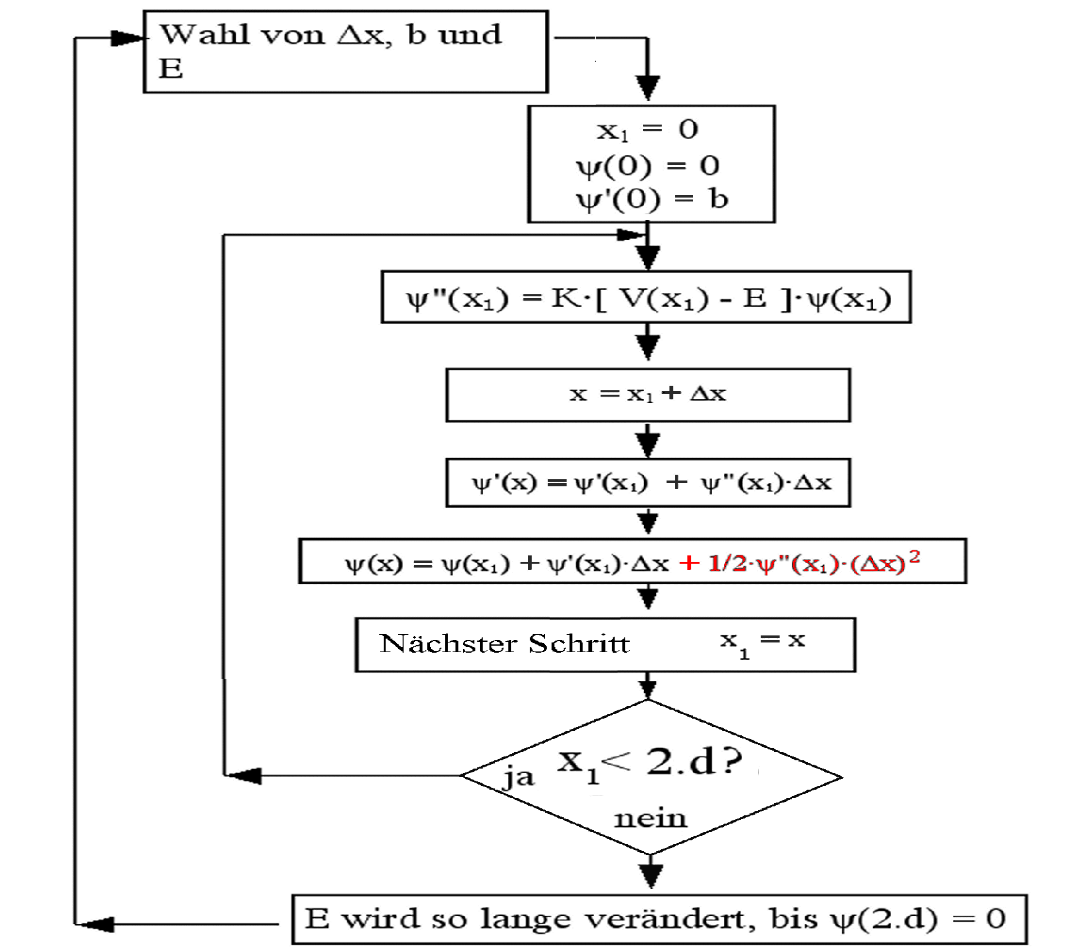
$$\psi(\Delta x) = \psi(0) + \psi'(0) \cdot \Delta x$$

Allgemein:

$$\psi'(x+\Delta x) = \psi'(x) + \psi''(x) \cdot \Delta x$$

$$\psi(x+\Delta x) = \psi(x) + \psi'(x) \cdot \Delta x$$

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule




Flussdiagramm

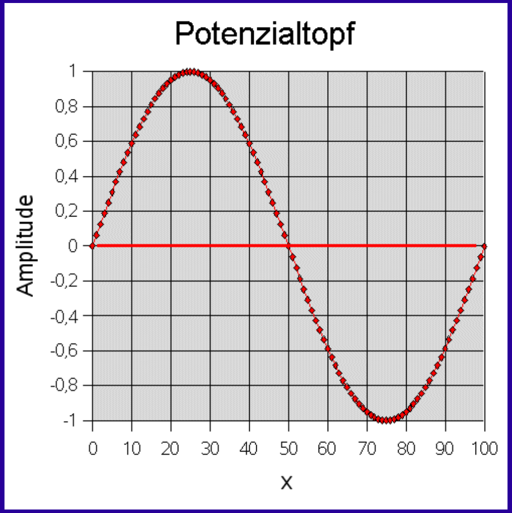
Konvergenzbeschleunigung durch quadratischen Term

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \psi''(x_i) \cdot \Delta x^2$$

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Vorteil einer Tabellenkalkulation

UNENDLICH



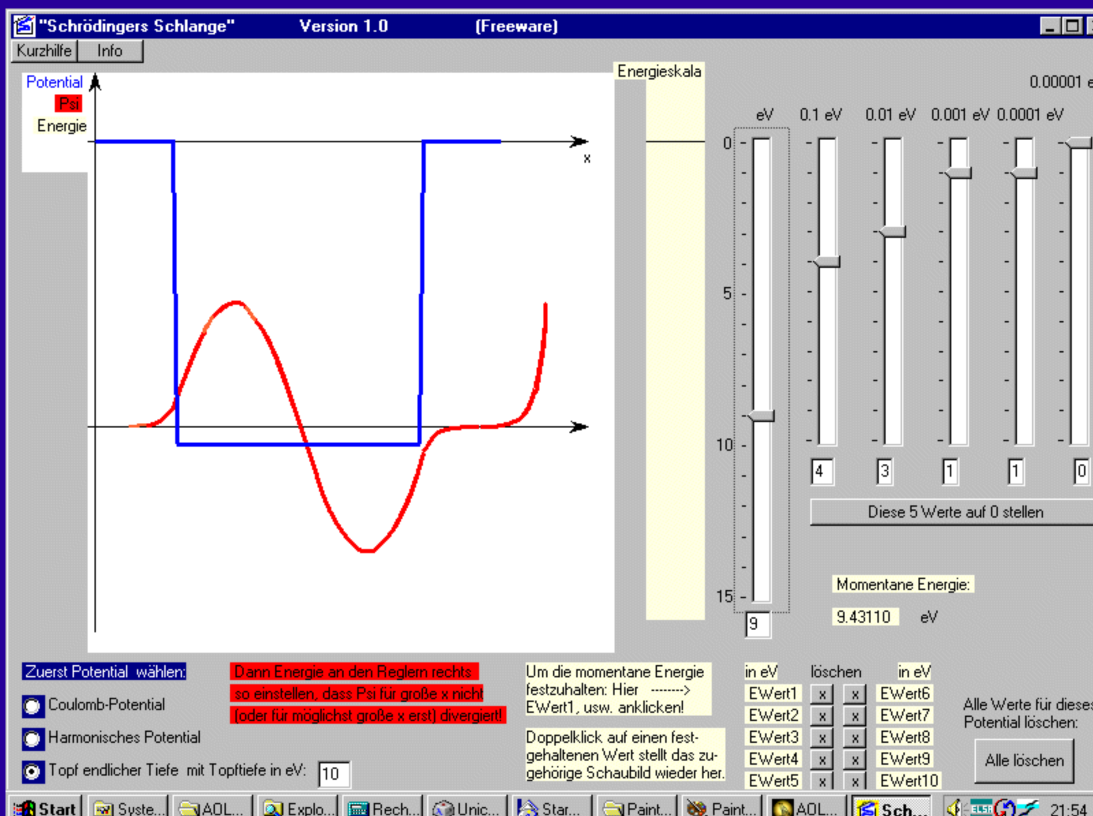

**Schüler erkennen:**

- Eigenwertproblem
- nicht irgendwelche Mechanismen, wie Reflexion von Wellen („stehende Wellen“)
- Kein Zusammenhang zwischen „Wellenausbreitung“ und „Teilchenbewegung“

- Interferenz von **Möglichkeiten** und nicht von „etwas“

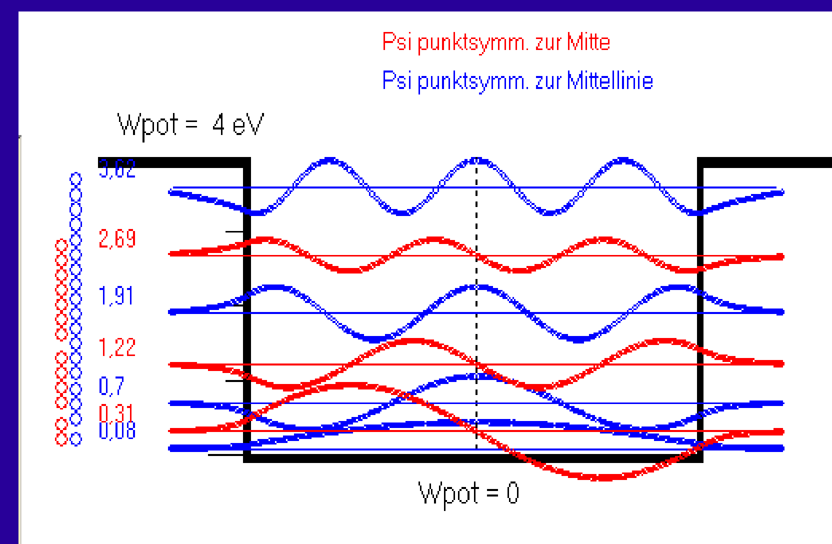
# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Methode 3: Einsatz fertiger PC-Programme



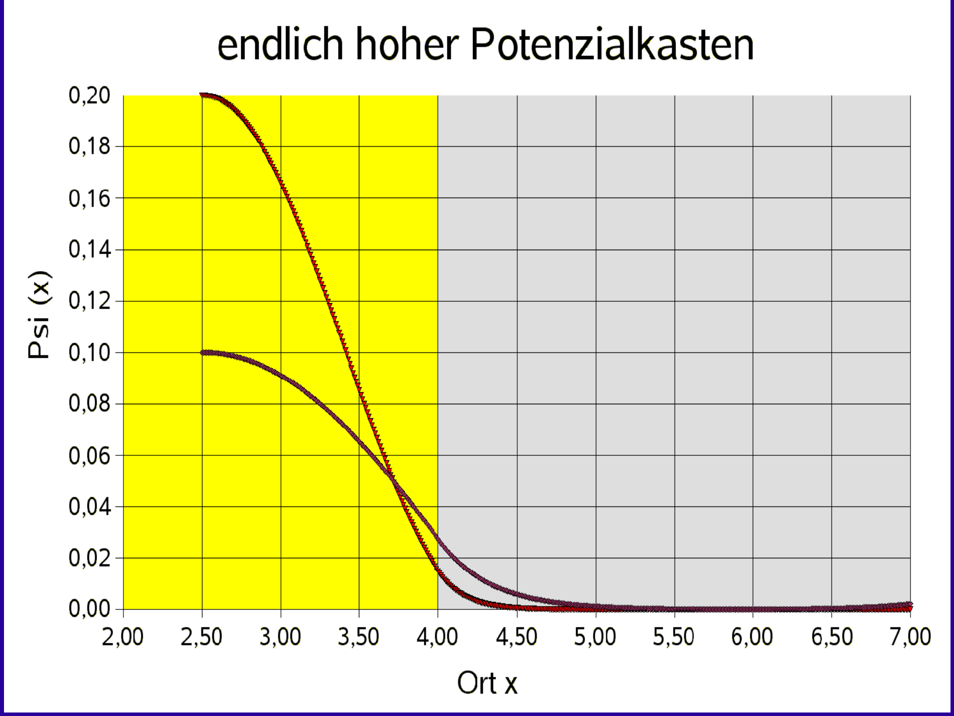

Küblbeck: **Schrödingers Schlange**

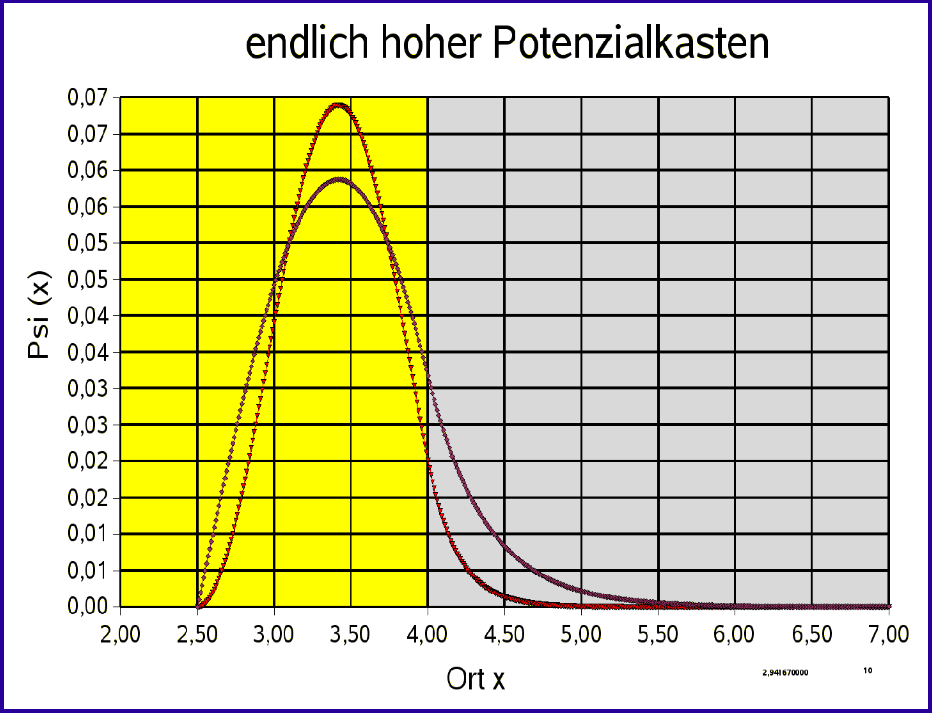
Bader: SCHRTOPF.EXE




z.B. endlich tiefer Pot. Topf

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule




Ergebnisse einer Tabellenkalkulation für endlich tiefen Potenzialtopf (nach links symmetrisch fortzusetzen)

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Viel Anlass, sich zu wundern:

- Alles oder nichts: Wenn richtiger Energiewert exakt getroffen, dann physikalische Lösung, sonst nur unphysikalische Lösung
- Die SG liefert genau die experimentellen Energiewerte und sogar Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten, obwohl SG „vom Himmel gefallen“
- Klassische Eigenschwingungen stellen engste Analoga dar. Dennoch: dort sind auch Schwingungen bei benachbarten Frequenzen möglich
- Diskrete Energien haben nichts mit besonderen Formen der Potenzialkurve zu tun, die etwa mehrere Minima (stabilen Lagen) aufweisen würde.
- Diskrete Energien sind eine Folge der speziellen Fragestellung (stationäre Zustände) und der Randbedingungen. Dahinter steckt das Messpostulat der Quantenphysik, nach dem nur **Eigenwerte einer Messgröße** (einer Observablen) als Messwerte auftreten dürfen.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?
- **IV Methodisches**
- V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## IV.1 Experten-Team-Verfahren

- Jedes Team besteht aus 2 Schülern
- getrennte, aber aufeinander abgestimmte Texte
- Schritt für Schritt wird jeder zum „Experten“
- jeder der „Experten“ instruiert dann seinen Partner über die neuen Erkenntnisse.

**1 A/B Die Partner informieren sich über Grundlagen** des Problems: Vom Farbstoff-Molekül zum klassischen Potenzialkasten

**1A Partner A wird zum Experten:** Klassisches Modell lang gestreckter Molekülketten
**1B Partner B wird zum Experten:** Was sagt die Quantenphysik zu klassischen Modellen?
(komplementäre Messgrößen wie E und p, E und $E_{kin}$; 2 klassisch denkbare Möglichkeiten, zwischen denen nicht unterschieden wird: also Interferenz)

**1A/B Die Experten informieren sich gegenseitig**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**2A Partner A wird zum Experten:** Wir suchen "stationäre Zustände", d.h. Eigenzustände der Energie bzw. Zustände mit be-stimmter Energie!

**2B Partner B wird zum Experten:** E und x , E und $p_x$ nicht gleichzeitig existent/messbar: Es hat in solchen Zuständen keinen Sinn, von einer Bewegung des Teilchens zu sprechen.

**2A/B Die Experten informieren sich gegenseitig**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**3 SL:** Stark geführte Erarbeitung der Energiestufen durch Einpassen von halben Wellenlängen

**4A Partner A wird zum Experten:** Wie kommt es zur Ausbildung stehender Wellen? - HUR halbklassisch plausibel gemacht

**4B Partner B wird zum Experten:** Was bedeutet es, dass eine von 0 verschiedene Minimalenergie (Grundzustandsenergie) vorhanden ist?

**4A/B Die Experten informieren sich gegenseitig**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## IV.2 Lernen an Stationen

**in Partnerarbeit** werden die Aufgaben gelöst, wobei **Hilfekärtchen** Anstöße geben können und **Lösungskärtchen** einen Vergleich bzw. eine Korrektur ermöglichen.

**Station 1**: Einpassen von Wellenfunktionen

**Station 2**: Interpretation von $/\psi/^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte

**Station 3**: Von der Wahrscheinlichkeitsdichte zu Wahrscheinlichkeiten (Integral)

**Station 4**: Lösungsansätze für ψ

**Station 5**: Normierung von ψ wegen Wahrscheinlichkeitsinterpretation

**Station 6**: Nachweis, dass die Lösungsansätze die zuSG lösen

**Station 7**: Bedingung für physikalische Lösungen, angewandt für „Schrödingers Schlange“ von Küblbeck

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## IV.3 Fragebogenmethode

bei Interpretationsfragen gewählt - Auswahl zwischen vorgegebenen Antworten

**PROBLEM: Wie kommt ein Teilchen in stationären Zuständen über den Knoten hinweg?**

**Aussage:** Im linearen Potenzialkasten kommt ein Teilchen **nicht** über den Knoten hinweg, weil es sich dort nie aufhalten darf.

**Kommentar:** Nein: Denn stationärer Zustand wurde gewählt; hier gibt es keine Bewegung; Frage falsch gestellt

**Aussage:** Die stationären Zustände entsprechen nicht hin- und herlaufenden Teilchen; sie enthalten keinerlei Informationen über eine Bewegung der Teilchen. Keine sinnvolle Frage!

**Kommentar:** Ja. Das ist Kernpunkt!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Aussage:** Ein Teilchen in stationären Zuständen ist nicht lokalisiert; es ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu beiden Seiten des Knotens zu finden.

**Kommentar:** Ja, aber nicht in dem Sinn, dass es zu beiden Seiten des Knotens „verschmiert“ ist oder sich dort gleichzeitig in Teilen aufhält. (Man findet es ja nur "ganz").

**Aussage:** Ein Teilchen hat in solchen Zuständen mit fester Energie keinen (be-stimmten) Ort. Dieser entsteht erst durch eine Ortsmessung. Wo das geschieht, ist eine Frage der Statistik gemäß dem Betragsquadrat der Welle.

**Kommentar: Ja, das ist wieder der Kernpunkt!**

## V.4 Lernen durch Lehren (Kurzreferate)

aufeinander abgestimmte 1-seitige Texte als Grundlage eines Kurzreferates (ca. 10 min), z.B.

- Absorption und Emission bei bestimmten lang gestreckten Farbstoff-Molekülen (anwendungsorientierte Hinführung zum Modell des Potenzialkastens)
- Klassische Betrachtung des linearen Potenzialkastens
- Grundsätzliche quantenphysikalische Aussagen zum linearen Potenzialkasten (z.B. dass E und $E_{kin}$ nicht gleichzeitig Eigenschaften des Systems sein können, dass es bei stationären Zuständen keine Bewegung gibt)
- Energiezustände des linearen PK
- Wellenfunktionen beim LPK
- Simulationen zum unendlich hohen bzw. endlich hohen LPK („Schrödingers Schlange“)
- Strahlende Übergänge beim LPK (Auswahlregeln und auch Folgen des Pauli-Prinzips bei Mehrteilchenzuständen)

# V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten

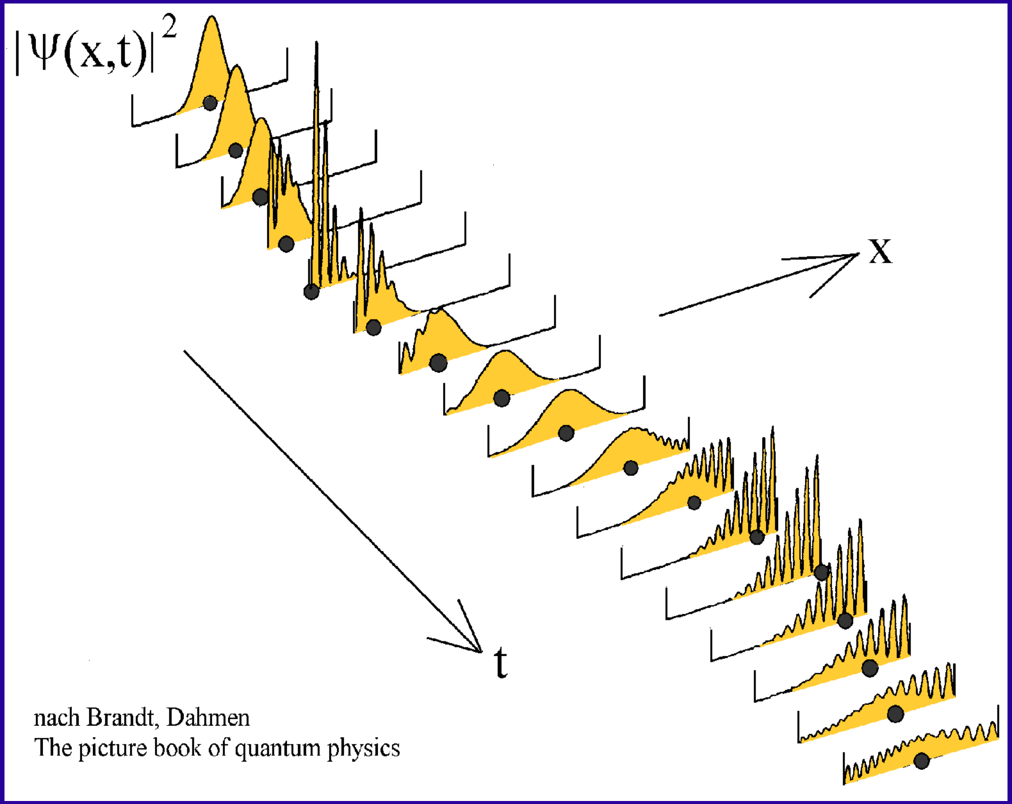
# Energieeigenwerte in der Realität ?

**Energien nicht so scharf**

- wegen Ankopplung des Quantensystems an das Strahlungsfeld
- SG ist dann nur Näherung, die das Strahlungsfeld vernachlässigt
- Insbesondere sorgt Ankopplung an das Strahlungsfeld für endliche Lebensdauer der Energieniveaus
- „Wunder“: Die HUR $\Delta E \,.\, \Delta t >= \hbar$ beschreibt die nächstbessere Näherung: Je größer $\Delta t$, desto schärfer sind die Energieniveaus CQED

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Hin und her laufende Teilchen?




Keine stationären Zustände

Wellenpakete aus überlagerten stationären Zuständen mit komplexen Exponentialfaktoren $e^{\,i\,E.t/\hbar}$ :

Zunächst sehr suggestiv!

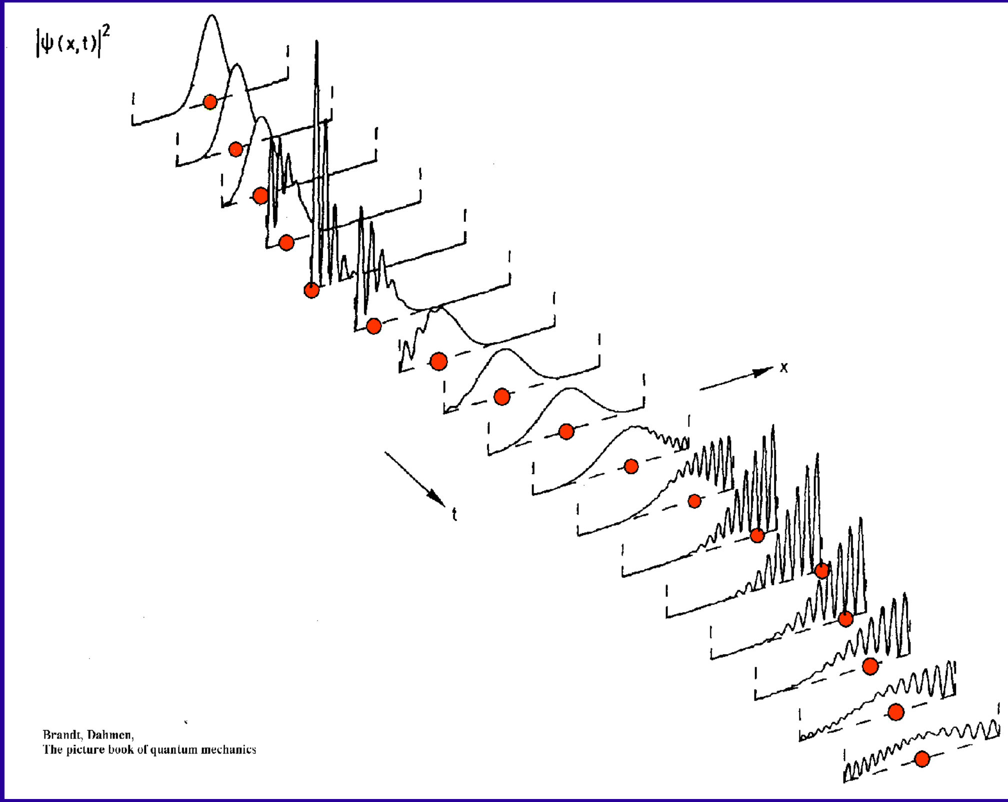
Klassische Schrödinger-Theorie (1926):

Teilchen sind Wellenpakete / werden durch WP beschrieben ?

**Aber:**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Hin und her laufende Teilchen?




- Wellenpakete „fließen auseinander“ (in der Regel)!
- Keine Wechselwirkung zwischen Teilen der „Ladungswolke“!
- Bei 2 Teilchen schon 6-dimensionale Wellen!
- Wellenpakete beschreiben /repräsentieren  nicht Teilchen, sondern Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten an Teilchen
- **Seit den 30-er Jahren geklärt: Elektronen im Potenzialkasten / Atom sind nie stehende Wellen!**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Wellen (Wellenfunktionen, Wellenpakete) taugen nicht zur ***Beschreibung*** von Teilchen, sondern nur zur Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse an Teilchen.

- Zeilinger: „Diese Wellen gibt es nur in den Köpfen der Physiker“

- Das Betragsquadrat der Wellenfunktion gibt **keine Teilchendichte** („Ladungsdichte“, „Elektronendichte“) einer vermeintlichen "Ladungswolke" wieder, sondern ausschließlich die Nachweiswahrscheinlichkeit in einem Intervall der Breite $\Delta x$:
- $/\psi(x)/^2 \, \Delta x.$

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

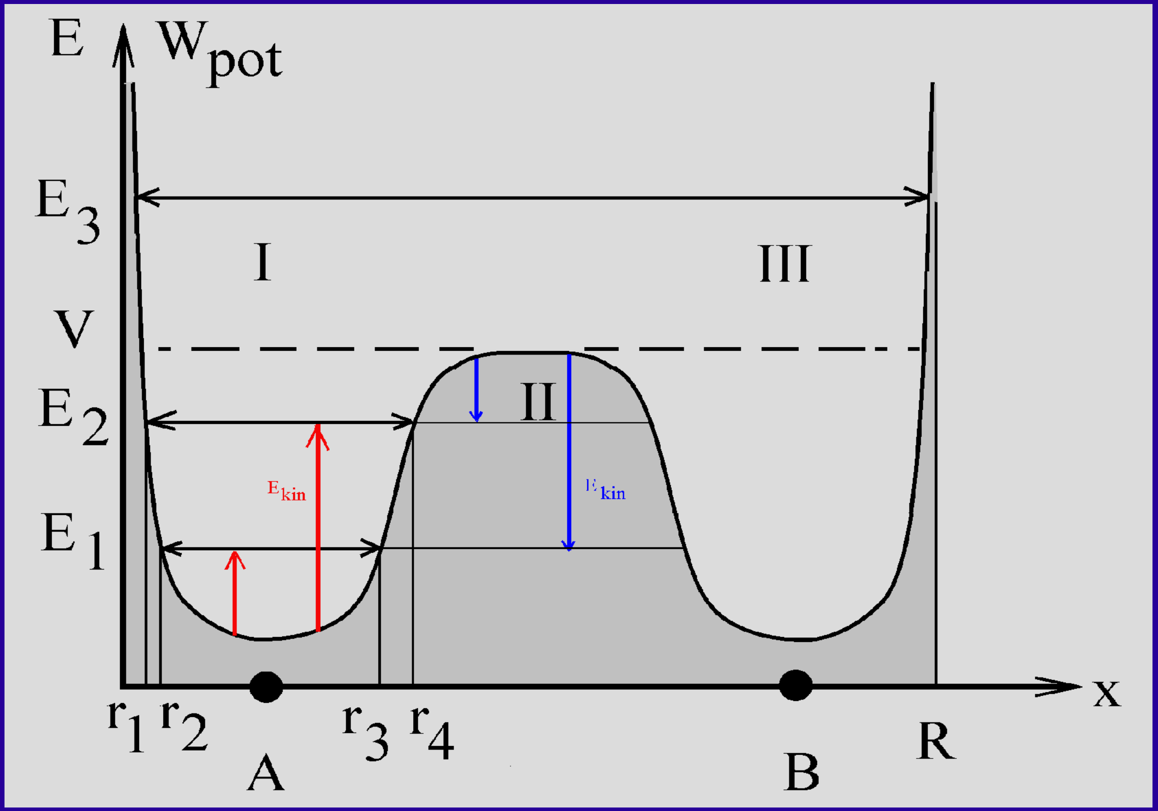
"

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III **Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?**
- IV **Methodisches**
- **V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten**
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

**Die Brisanz des Tunneleffekts ergab sich aus einer falschen Überlegung:**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Zum Tunneleffekt

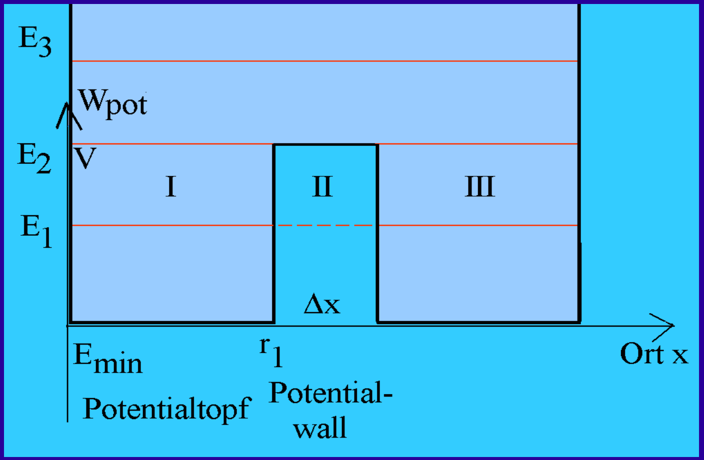



Klassisch ist der Durchtritt durch Bereich II verboten, wenn $E_{kin}$ dort negativ ($E_1$, $E_2$)

**Argument nicht anwendbar, da Teilchen in Zuständen bestimmter Gesamtenergie E keine $E_{kin}$ und $E_{pot}$ haben können!**

**Nichts verbietet den Nachweis von Teilchen in allen drei Bereichen!**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule




## Messung von $E_{kin}$ im Bereich II:

Ort mit Un-be-stimmtheit $\Delta x$ festgelegt

=> Impuls-Un-be-stimmtheit $\Delta p_x \geq \hbar / \Delta x$

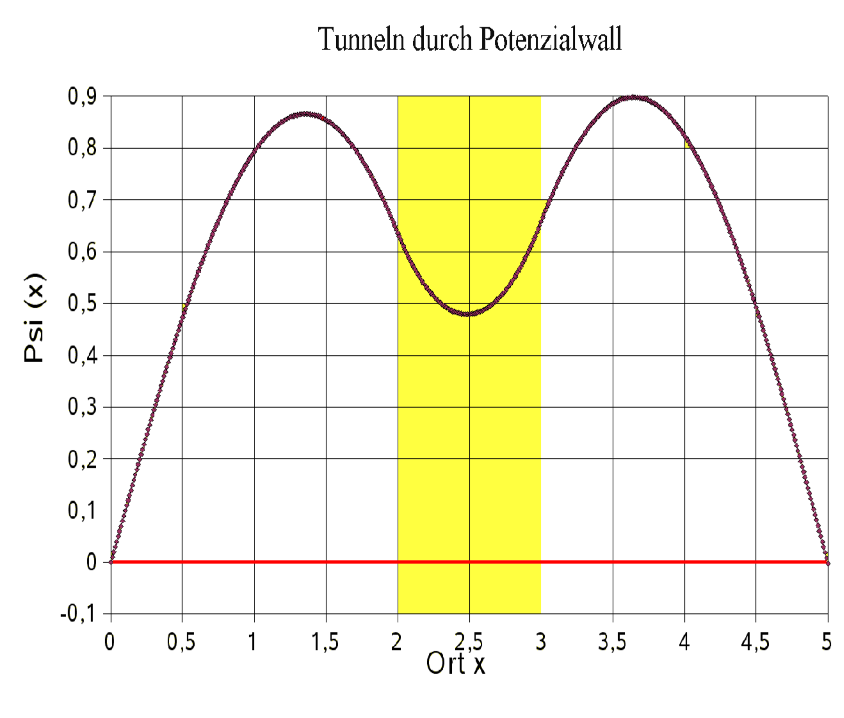
=> Un-be-stimmtheit der kinetischen Energie $\Delta E_{kin} = \Delta p_x^2/2m \geq \hbar^2/(\Delta x^2 \cdot 2m)$

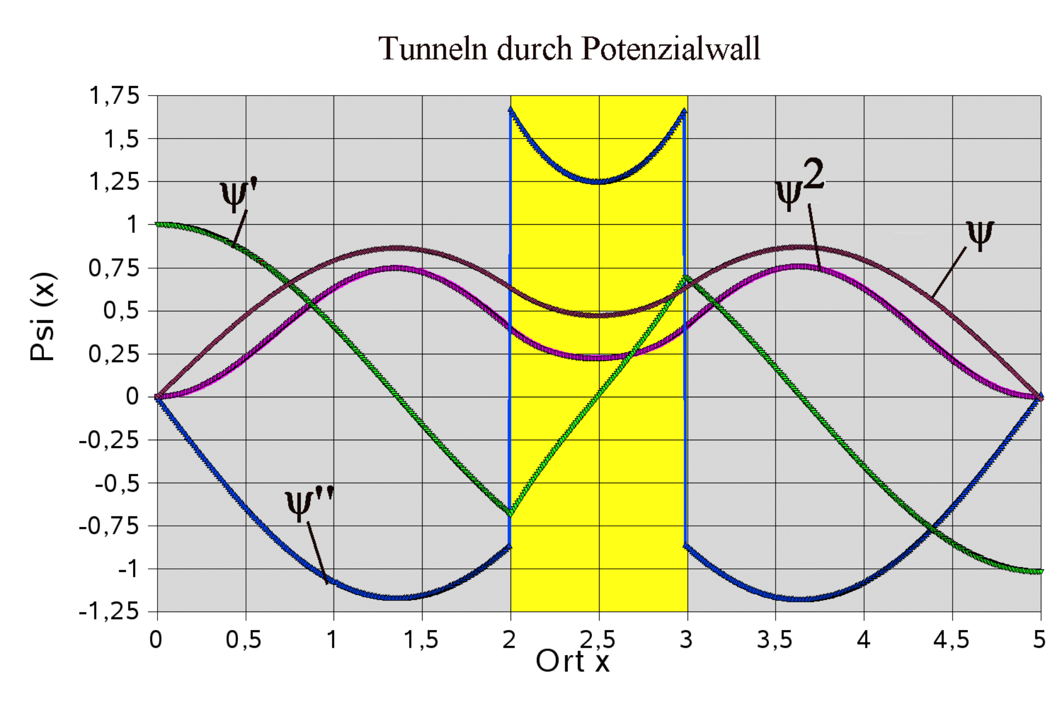
Messwerte für $E_{kin}$ können V weit überschreiten!

**Nichts verbietet den Nachweis von Teilchen in allen drei Bereichen!**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

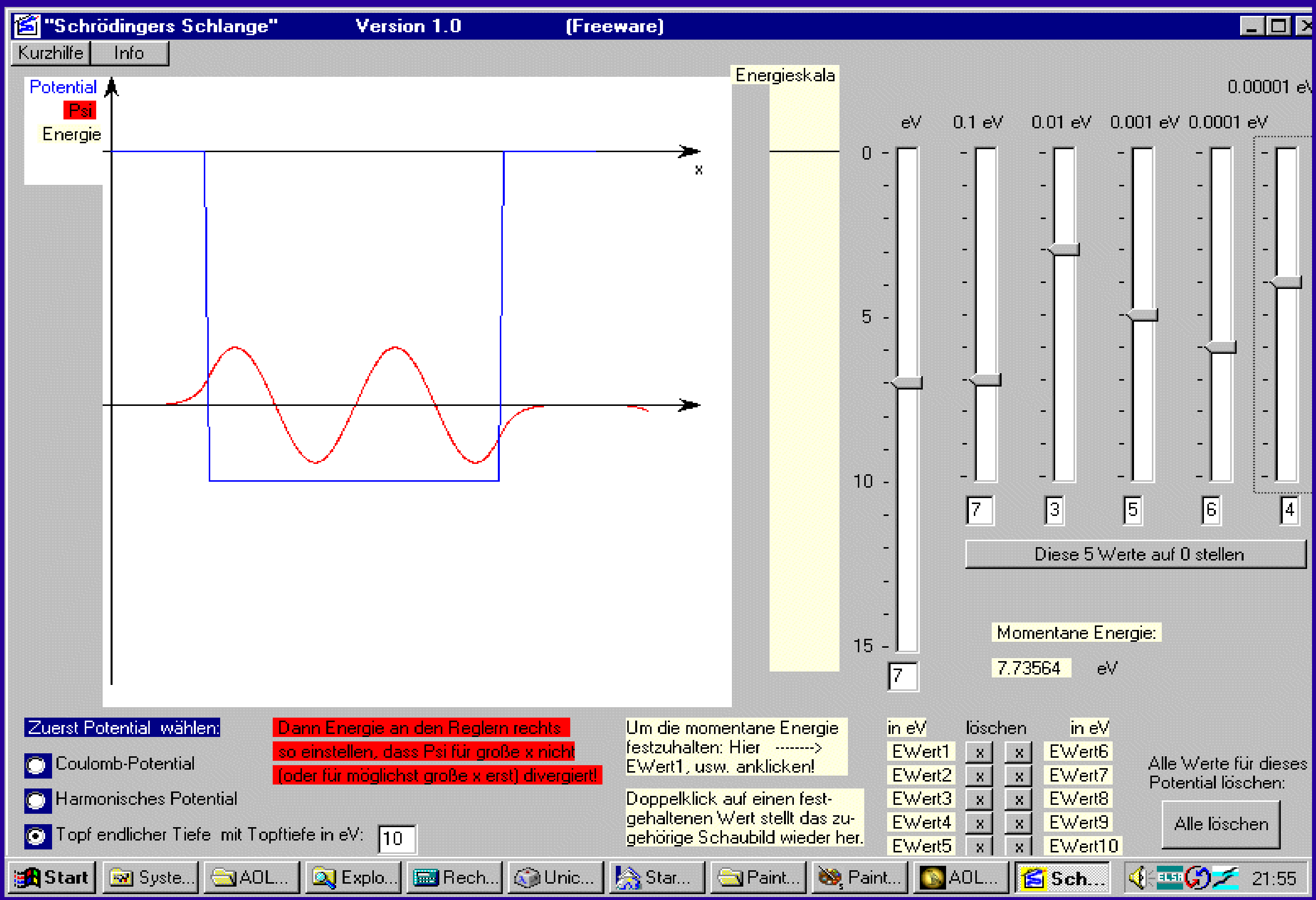
## Ergebnis einer Tabellenkalkulation („Schießen“)

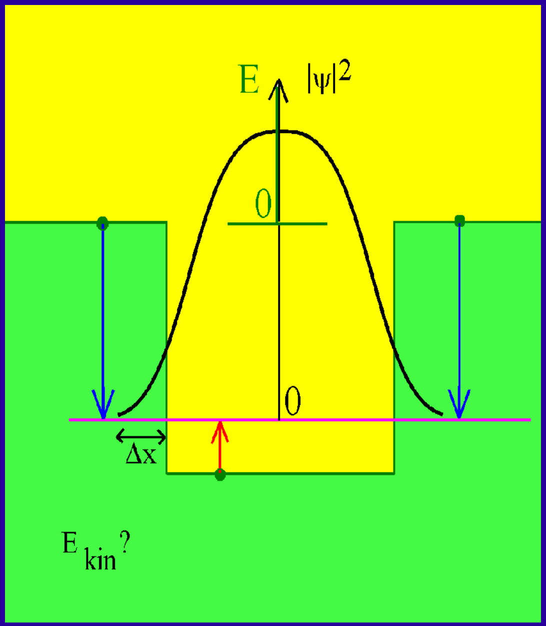



SCHIESSEN

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule




Negative $E_{kin}$ in der Potenzialwand?

**Nein!**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Es gibt keinen Grund, sich über das "Eindringen" in die Potenzialwand zu wundern,**

**außer,**

**wenn man fälschlicherweise annimmt, dass die Teilchen zugleich Gesamtenergie E und kinetische Energie $E_{kin}$ als Eigenschaft besitzen.**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

"

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III **Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?**
- IV **Methodisches**
- **V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten**
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

# Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen:

$$i \;\hbar\, \dot{\psi} = H\, \psi$$

1. Die SG der klassischen Schrödinger-Theorie (1926)

2. Die SG der nichtrelativistischen Schrödinger-Feld-Theorie (ab ca. 1930)

**3. Die SG der Quantenmechanik (> 1926)**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

## Was Sie erwartet:

"

- II Zur Physik der Schrödinger-Gleichung
- III **Was davon könnte im Unterricht gebracht werden?**
- **IV Methodisches**
- **V Noch mehr zur Physik der Wellenfunktionen im Potenzialkasten**
- VI Tunnel-Effekt
- VII Das Kreuz mit den Schrödinger-Gleichungen
- VIII Resümee

# VII Resümee

- Die Mathematik des eindimensionalen unendlichen Potenzialtopfes ist relativ einfach, die Physik dazu erfordert jedoch genauere Kenntnisse darüber, was man eigentlich macht.

- Mit der zeitunabhängigen SG werden ausschließlich stationäre Zustände mit einer be-stimmten Gesamtenergie E gesucht. Sie entsteht aus der SG durch Abseparieren des Zeitanteils.

- In Zuständen be-stimmter Gesamtenergie E haben $E_{kin}$ und $E_{pot}$ keinen physikalischen Sinn. Alle Argumentationen mit ihnen gehören ins Reich der Fantasie.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Auch eine Bewegung oder ein „Aufenthalt“ eines Teilchens an einem be-stimmten Ort hat bei stationären Zuständen keinen physikalischen Sinn.
- Kein Argument verbietet den Nachweis eines Teilchens in einem Potenzialwall oder einer endlich hohen Potenzialwand.
- Für die Schule geeignete Lösungsmethoden sind verifizierte Ansätze, Tabellenkalkulation und bestimmte fertige PC-Programme, mit denen erlaubte E-Werte gesucht werden. Kriterium dafür sind Endlichkeit der Wellenfunktion (Quadratintegrabilität) bzw. die Randbedingungen.
- Bei aller relativen Einfachheit der Formalismen muss ein Staunen über die Mächtigkeit der SG mit/trotz ihrer Lösungsvielfalt verbleiben.

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

- Es werden eine Reihe von Unterrichtsmethoden empfohlen wie Experten-Team-Verfahren, Lernen an Stationen, Methode „Sichere Leine“, Lernen durch Lehren (Kurzreferate) und die Fragebogen-methode zu Interpretationsfragen. Zu all diesen Verfahren hat der Autor Unter-richtsmaterialien zur Verfügung gestellt:
- Horst Hübel, Schüleraktivierende Unterrichtsmaterialien zur Quantenphysik Teil 3 Grundlagen der Atomphysik, BoD 2008, ISBN-13 978-3-8370-1321-4

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

**Quantenteilchen sind anders!**

**Aber sie sind Teilchen!**

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

http://www.forphys.de

Hier finden Sie u.a. auch den ausführlichen Text dieses Vortrags (und früherer) und Vieles mehr.

# ENDE

Vielen Dank!

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Aus dem Bayerischen Lehrplan 12. Jgst.:

**Analog zu den Newton'schen Gesetzen, die als Axiome der klassischen Mechanik betrachtet werden können, liefert die Schrödingergleichung,**

**die nur in ihrer zeitunabhängigen, eindimensionalen Form betrachtet wird,**

**den Schlüssel zur Lösung quantenmechanischer Probleme.**

J:\dillingen08\dillingen

zurück

# Der eindimensionale Potenzialtopf und der Tunneleffekt in der Schule

Bei der graphischen Darstellung von Lösungen der Schrödingerglei-chung für weitere einfache quantenmechanische Systeme können die Schüler Computerprogramme verwenden.

Elektron im Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden, stehende Wellen und **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten**, diskrete Energiewerte

Hinweis auf die zeitunabhängige, eindimensionale Schrödingerglei-chung **als quantenphysikalische Grundgleichung**

*Interpretation* der graphischen Lösungen der Schrödingergleichung für den **endlich hohen** Potentialtopf, Hinweis auf den Tunneleffekt